

CARTILLA DE FÍSICA III - VOL. II

Problemas resueltos de electricidad y magnetismo.





CARTILLA DE FÍSICA III – VOL. II

Problemas resueltos de electricidad y magnetismo

Jorge Eliecer Murillo Ballesteros



25 DE MAYO DE 2021

ESCUELA MILITAR DE AVIACIÓN MARCO FIDEL SUÁREZ

www.emavi.du.co

Es posible volar sin motores, pero no sin conocimiento y habilidad. Considero que esto es algo afortunado, para el hombre, por causa de su mayor intelecto, ya que es más razonable la esperanza de igualar a los pájaros en conocimiento, que igualar a la naturaleza en la perfección de su maquinaria

Wilburg Wright

Presentación

El presente material tiene como fin servir de apoyo a los cadetes de la Escuela Militar de Aviación Marco Fidel Suarez en la asignatura de Física 3. Es un repositorio de problemas resueltos, (con una breve presentación de la teoría de los temas tratados en el curso, que en ningún momento pretende sustituir el texto guía) que van a ampliar la gama de problemas solucionados por el docente en la asignatura. Espero que cumpla con el fin propuesto, cualquier duda o inquietud por favor manifestarla, pues esta es una primera versión que necesita ser revisada

Jorge Eliécer Murillo Ballesteros

Docente de Física

Índice

El Campo eléctrico	1
Problemas resueltos de aplicación ley de Coulomb	8
Problemas resueltos de campo eléctrico	23
Ley de Gauss	49
Problemas resueltos de ley de Gauss	53
El potencial eléctrico	69
Problemas resueltos de potencial eléctrico	73
Capacitancia	118
Problemas resueltos de capacitancia	124
Corriente y resistencia	137
Problemas resueltos de corriente y resistencia	142
Magnetismo	159
Problemas resueltos de magnetismo	164
Ley de Ampere	179
Problemas resueltos de ley de Ampere	184
Inducción magnética	196
Problemas resueltos de inducción magnética	201
Ondas electromagnéticas	213
Problemas resueltos de ondas electromagnéticas	219
Referencias	233

MAGNÉTISMO

El *campo magnético* desde que fue descubierto ha sido uno de los más estudiados, pues este fenómeno intrigaba a los investigadores, dado que en sus inicios no se sabía exactamente como era que funcionaba y cuáles eran sus causas, hoy día se tiene una comprensión aceptable del fenómeno electromagnético.

Los campos magnéticos son producidos por cargas en movimiento, cargas individuales o un grupo de cargas (corriente eléctrica). Así mismo una carga o una corriente inmersa en una región donde existe un campo magnético experimentara una fuerza.

La fuerza magnética que experimenta una partícula cargada en un campo magnético es directamente proporcional a la velocidad de la partícula, el campo magnético y la carga que esta posee, además se tiene que esta fuerza es perpendicular al plano formado por la velocidad y el campo magnético, esto se puede escribir como

$$\vec{F} = q(\vec{V} \otimes \vec{B})$$

La figura No. XVIII, muestra la dirección de la fuerza magnética que experimenta una partícula cargada moviéndose en un campo magnético.

Partículas cargadas con carga opuesta experimentarían fuerzas magnéticas opuestas al moverse en regiones donde existe el mismo valor de campo, con la misma velocidad, figura 113.

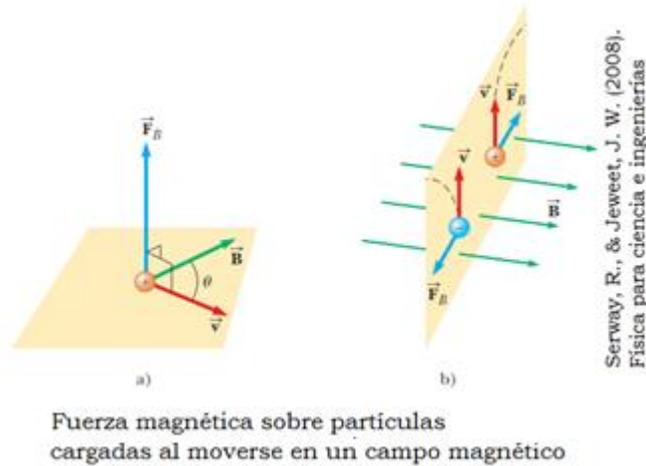


Figura 113.

El campo magnético sobre una partícula cargada no realiza trabajo, la acción del campo magnético sobre partícula es solo de modificar la trayectoria de esta. La trayectoria de una partícula cargada en una región donde existe un campo magnético uniforme es una circunferencia, figura 114.

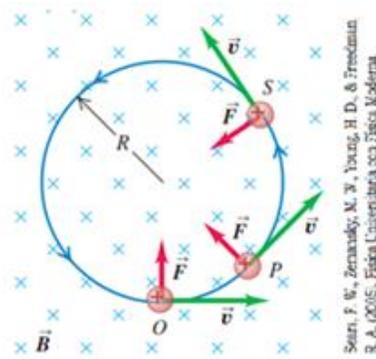


Figura 114. Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme

Cuando un conductor que transporta una corriente es colocado en una región donde existe un campo magnético este experimentará una fuerza, esto se debe a que las partículas cargadas de la corriente son afectadas (experimentan una fuerza) por el campo magnético y “empujan” al conductor

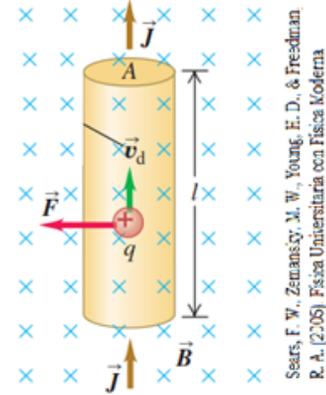


Figura 115. Fuerza magnética sobre un conductor que transporta una corriente

(figura 115), lo cual se traduce en una fuerza neta sobre el conductor.

La fuerza que experimenta un conductor rectilíneo de longitud \vec{L} inmerso en un campo magnético \vec{B} , uniforme es

$$\vec{F}_B = I\vec{L} \otimes \vec{B}$$

De donde la dirección es la misma en la que apunta la corriente. Algunas veces es mejor escribir \vec{L} como

$$\vec{L} = L\hat{u}_T$$

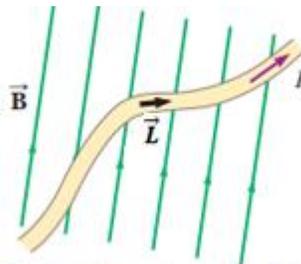
De donde \hat{u}_T , es un vector unitario tangente en todo punto a la trayectoria del conductor, con esta definición la expresión para la fuerza quedaría

$$\vec{F}_B = I L(\hat{u}_T \otimes \vec{B})$$

Si el conductor tiene una forma arbitraria, figura No. XXI, este se divide en pequeñas secciones de longitud ΔL de tal manera que prácticamente cada una de estas secciones sea rectilínea y por lo tanto va a experimentar una fuerza ΔF .

La fuerza neta sobre el conductor será la suma de todas estas pequeñas fuerzas lo cual dará como resultado

$$\vec{F}_{neta} = \int d\vec{F}$$



Serway, R., & Jeweet, J. W. (2008).
Física para ciencia e ingenierías

Un segmento de alambre de forma arbitraria que lleva una corriente I en un campo magnético \vec{B} experimenta una fuerza magnética.

Figura 116.

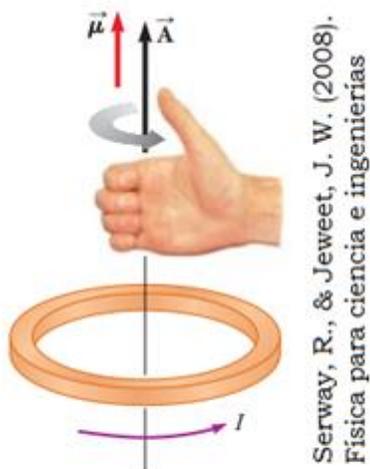
$$\vec{F}_{neta} = I \int (\hat{u}_T \otimes \vec{B}) dL$$

Si el conductor que transporta la corriente es cerrado (una espira), figura No. XXII. entonces la fuerza magnética neta sobre esta es cero, pero esta experimenta un torque, es decir, gira. Este torque se llama *torque magnético* o *momento de torsión* y está dado por

$$\vec{\tau} = I\vec{A} \otimes \vec{B}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \otimes \vec{B}$$

De donde $\vec{\mu} = I\vec{A}$, es el *momento dipolar magnético* y es perpendicular al plano de la espira, para hallarlo se sigue la regla de la mano derecha, figura No. XXII.



Serway, R., & Jewett, J. W. (2008).
Física para ciencia e ingenierías

Figura 117. Regla de la mano derecha para determinar la dirección del vector \vec{A} . La dirección del momento magnético $\vec{\mu}$ es la misma que la dirección de \vec{A} .

El torque magnético es el principio fundamental por el cual funcionan los motores eléctricos. Un motor eléctrico es un dispositivo que convierte energía eléctrica en energía mecánica.

PROBLEMAS RESUELTOS DE MAGNÉTISMO

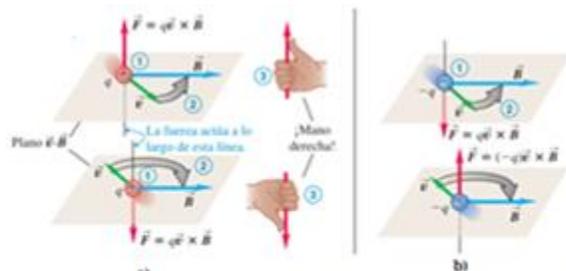
1. Un campo magnético está orientado en cierta dirección en un plano horizontal. Un electrón se mueve en cierta dirección en este plano. Para esta situación, hay (Bauer & Westfall, 2011)

- una dirección posible para la fuerza magnética sobre el electrón.
- hay dos direcciones posibles para la fuerza magnética sobre el electrón.
- hay una infinidad de direcciones posibles para la fuerza magnética sobre el electrón.

Solución: La fuerza magnética sobre una carga está dada por la expresión:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

De acuerdo con esta expresión se tiene que existen dos posibles direcciones de la fuerza magnética para un campo dado, todo depende de la dirección de la velocidad de la partícula, dado que el producto cruz entre dos vectores sigue la regla de la mano derecha, lo cual se ilustra en la figura 118. Por lo tanto, **la respuesta correcta es la opción b).**



Francis W. Sears, Mark W. Zemansky, Hugh D. Young, Roger A. Freedman. Física Universitaria con Física Moderna

Figura 118.

2. Una partícula con carga q está en reposo cuando repentinamente se enciende un campo magnético. El campo apunta en la dirección z . ¿Cuál es la dirección de la fuerza neta que actúa sobre la partícula cargada?

- a) En la dirección x.
- b) En la dirección y.
- c) La fuerza neta es cero.
- d) En la dirección z.

Solución: Tal como se sabe la fuerza magnética sobre una partícula que está inmersa en un campo magnético está dada por:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

De acuerdo con la expresión dada se tiene que la partícula cargada solo experimentará una fuerza en el caso en que posea una velocidad no nula y que no sea paralela al campo magnético. En nuestro caso la partícula está en reposo cuando se enciende el campo magnético, por lo tanto, su velocidad es cero y de aquí que no experimente fuerza magnética alguna. **La opción correcta en la c).**

3. ¿Qué opción presenta una situación con la mayor frecuencia de un ciclotrón?
(Bauer & Westfall, 2011)

- a) Un electrón con velocidad v en un campo magnético con magnitud B .
- b) Un electrón con velocidad $2v$ en un campo magnético con magnitud B .
- c) Un electrón con velocidad $v/2$ en un campo magnético con magnitud B .
- d) Un electrón con velocidad $2v$ en un campo magnético con magnitud $B/2$.
- e) Un electrón con velocidad $v/2$ en un campo magnético con magnitud $2B$.

Solución: La fuerza magnética que experimenta una partícula cargada en un campo magnético está dada por

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Esta fuerza es perpendicular al plano generado por la velocidad y el campo magnético. Esta fuerza, es una fuerza de tipo central (la trayectoria de una partícula en un campo magnético uniforme es una circunferencia o un arco de círculo y el movimiento de esta es circular uniforme), por lo tanto

$$F = m * a_c$$

De donde, a_c , es la aceleración centrípeta; y está dada por

$$a_c = w^2 r = \frac{v^2}{r}$$

Donde w , es la velocidad angular y r , el radio de la trayectoria. Reemplazando en la expresión para la fuerza se tiene:

$$F = qvB = mw^2r = qwrB$$

Donde se ha reemplazado $v = wr$. W , es la velocidad angular de la partícula, o también se conoce como *frecuencia del ciclotrón*. Entonces despejando para w , se tiene

$$w = \frac{qB}{m}$$

Como se puede observar en la anterior ecuación, básicamente la frecuencia ciclo trónica depende del campo magnético. **Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción e).**

4. En el efecto Hall, una diferencia de potencial producida a través de un conductor de grosor finito en un campo magnético por una corriente que circula por el conductor está dada por (Bauer & Westfall, 2011)
- a) el producto de la densidad de electrones, la carga de un electrón y el grosor del conductor dividido entre el producto de las magnitudes de la corriente y el campo magnético;
 - b) el recíproco de la expresión descrita en la opción a);

- c) el producto de la carga de un electrón y el grosor del conductor dividido entre el producto de la densidad de electrones y las magnitudes de la corriente y el campo magnético;
- d) el recíproco de la expresión descrita en la opción c);
- e) ninguna de las anteriores.

Solución: La diferencia de potencial Hall (V_H) está dada por:

$$\Delta V_H = \frac{iB}{neh}$$

De donde, i , es la corriente; B el campo magnético, n , la densidad de portadores de carga; e , la carga del electrón y h , el espesor de la placa. Dicho de otra manera, el voltaje Hall es igual al producto de la corriente y el campo magnético dividido por el producto entre, la densidad de portadores de carga, la carga del electrón y el espesor de la placa; por lo cual se puede concluir que **la respuesta correcta es la opción e).**

5. Un electrón (con carga $-e$ y masa m_e) que se mueve en la dirección x positiva entra en un selector de velocidades, que consta de campos eléctrico y magnético cruzados: \mathbf{E} está dirigido en la dirección y positiva y \mathbf{B} está dirigido en la dirección z positiva. Para una velocidad v (en la dirección x positiva), la fuerza neta sobre el electrón es cero, y el electrón se mueve en línea recta a través del selector de velocidades. ¿Con qué velocidad se mueve un protón (con carga $+e$ y masa $m_p = 1\,836\,m_e$) en línea recta a través del selector de velocidades? (Bauer & Westfall, 2011)

- a) v
- b) $-v$
- c) $v/1\,836$
- d) $-v/1\,836$

Solución: En el selector de velocidades un campo magnético, y un campo eléctrico se cruzan de tal manera que las partículas cargadas no sufran desviación alguna, esto se logra gracias a que la fuerza magnética y la fuerza eléctrica que actúan sobre la carga q , se equilibran, esto es

$$F_e = F_m$$

$$qE = qvB$$

Despejando la velocidad se tiene

$$v = \frac{E}{B}$$

De acuerdo con la anterior ecuación se tiene que la velocidad de la partícula cargada en esa región no depende de la carga y la masa de la partícula, solo depende del valor de los campos. Lo anterior quiere decir que la **respuesta correcta es la opción a.**

6. ¿En qué dirección actúa una fuerza magnética sobre un electrón que se mueve en la dirección x positiva en un campo magnético que apunta en la dirección z positiva? (Bauer & Westfall, 2011)

- a) En la dirección y positiva.
- b) En la dirección y negativa.
- c) En la dirección x negativa.
- d) En cualquier dirección en el plano x - y .

Solución: La fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada está dada por

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Colocando las condiciones dadas en la ecuación se tiene:

$$\vec{F} = -e(v \hat{i} \times B \hat{k})$$

$$\vec{F} = -evB(\hat{i} \times \hat{k})$$

Siguiendo la regla de la mano derecha se tiene que el producto cruz del paréntesis da en la dirección y negativo esto es

$$\vec{F} = -evB(-\hat{j})$$

$$\vec{F} = evB(\hat{j})$$

Por lo anterior se tiene entonces que la fuerza magnética va en dirección y positiva. Lo cual quiere decir que **la respuesta correcta es la opción a).**

7. Una partícula cargada se mueve en un campo magnético constante. Establezca si cada una de las siguientes afirmaciones relacionada con la fuerza magnética ejercida sobre la partícula es falsa o verdadera. (Suponga que el campo magnético no es paralelo ni antiparalelo a la velocidad.) (Bauer & Westfall, 2011)
- No realiza trabajo sobre la partícula.
 - Puede incrementar la velocidad de la partícula.
 - Puede cambiar la velocidad de la partícula.
 - Sólo puede actuar sobre la partícula cuando ésta se encuentra en movimiento.
 - No modifica la energía cinética de la partícula.

Solución: Dado que la fuerza magnética es perpendicular a la trayectoria se tiene que esta no realiza trabajo sobre la carga, por lo tanto, **la opción a) es verdadera.** El que la fuerza magnética no realice trabajo significa que no hay cambio en la energía cinética de la partícula (debido al teorema del trabajo y la energía, $W = \Delta K$), lo cual conlleva a que la magnitud de la velocidad de la partícula permanece constante, es decir, **la opción b) es falsa.** De lo dicho anteriormente se desprende que la opción c) es **verdadera**, pues la magnitud de

la velocidad es constante, pero su dirección cambia a cada instante dado que la trayectoria de la partícula es una circunferencia. Por lo dicho anteriormente se concluye que **la opción e) es verdadera.**

8. Un electrón se mueve en trayectoria circular con radio r_i en un campo magnético constante. ¿Cuál es el radio final de la trayectoria cuando el campo magnético se duplica? (Bauer & Westfall, 2011)

a) $\frac{r_i}{4}$

b) $\frac{r_i}{2}$

c) r_i

d) $2r_i$

e) $4r_i$

Solución: La fuerza magnética para una partícula inmersa en un campo magnético está dada por:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$F = m * a_c = m \frac{v^2}{r}$$

Combinando estas dos ecuaciones se tiene

$$m \frac{v^2}{r} = qvB$$

Despejando el radio

$$\frac{mv}{qB} = r_i$$

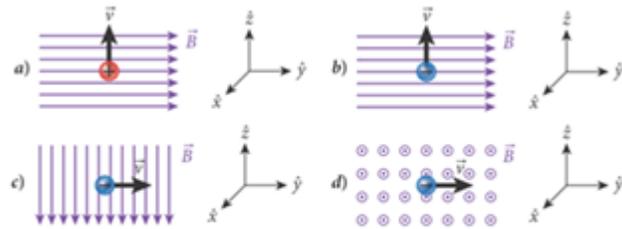
De esta ecuación se puede ver que el radio de la trayectoria es inversamente proporcional al campo. Si el campo magnético se duplica entonces se tiene:

$$\frac{mv}{q2B} = r$$

$$\frac{r_i}{2} = r$$

De lo anterior se desprende que **la respuesta correcta es la opción b).**

9. En el sistema de coordenadas XYZ, trace y especifique (en términos de los vectores unitarios \hat{x} , \hat{y} y \hat{z}) la dirección de la fuerza magnética sobre cada una de las partículas en movimiento que muestra la figura 119. Nota: El



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. *Física; para ingenierías y ciencias con física moderna*

Figura 119.

eje y positivo es hacia la derecha; el eje z positivo es hacia la parte superior de la página y el eje x positivo está dirigido hacia fuera de la página. Un alambre conductor de corriente se coloca en un gran campo magnético uniforme, \vec{B} . No obstante, el alambre no experimenta ninguna fuerza. Explique cómo es posible esto. (Bauer & Westfall, 2011)

Solución: La fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada está dada por

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

La figura muestra una forma nemotécnica para realizar el producto cruz, la figura 120, se recorre en el sentido opuesto al que avanzan las manecillas del reloj, si se realiza en sentido horario el resultado será negativo. De acuerdo con lo anterior realizaremos el producto cruz para cada una de las situaciones

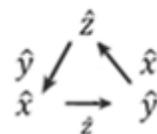


Figura 120

$$\vec{F}_a = q(v\hat{z} \times B\hat{y}) = qvB (\hat{z} \times \hat{y}) = qvB (-\hat{x})$$

$$\vec{F}_b = -q(v\hat{z} \times B\hat{y}) = -qvB (\hat{z} \times \hat{y}) = -qvB (-\hat{x}) = qvB (\hat{x})$$

$$\vec{F}_c = -q(v\hat{y} \times B(-\hat{z})) = -qvB (\hat{y} \times (-\hat{z})) = -qvB (-\hat{x}) = qvB (\hat{x})$$

$$\vec{F}_d = -q(\hat{y} \times B\hat{x}) = qvB (\hat{y} \times \hat{x}) = qvB (-\hat{z})$$

10. Un alambre conductor de corriente se coloca en un gran campo magnético uniforme, \vec{B} . No obstante, el alambre no experimenta ninguna fuerza. Explique cómo es posible esto. (Bauer & Westfall, 2011)

Solución: La fuerza magnética que experimenta un conductor que transporta una corriente I está dada por:

$$\vec{F} = I(\vec{l} * \vec{B})$$

$$F = IlB \text{ Sen}\theta$$

De donde L es la longitud del conductor y θ el ángulo que forman los vectores \vec{l} y \vec{B} . Para que el alambre no experimente fuerza magnética alguna se necesita que este sea paralelo o antiparalelo al campo magnético, esto debido a la definición del producto cruz.

11. Un protón se mueve con una velocidad $\vec{V} = (2\hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k})$ m/s en una región donde el campo magnético tiene un valor $\vec{B} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$ T. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza magnética que experimenta esta carga?

Solución: La carga de un protón es $q = 1.6 * 10^{-19} C$, La fuerza magnética sobre el protón está dada por

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

El producto cruz entre la velocidad y el campo se puede calcular utilizando los determinantes

$$\vec{F} = 1.6 * 10^{-19} \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F} = 1.6 * 10^{-19} [((-4 * -3) - (2 * 1))\hat{i} - ((2 * -3) - 1 * 1)\hat{j} + (2 * 2 - (1 * -4))\hat{k}]$$

$$\vec{F} = 1.6 * 10^{-19} [(10)\hat{i} - (-7)\hat{j} + (8)\hat{k}]$$

$$\vec{F} = [16 \hat{i} + 11.2 \hat{j} + 12.6 \hat{k}] * 10^{-19}$$

La magnitud de la fuerza es la raíz cuadrada de la suma de las componentes al cuadrado

$$F = \sqrt{16^2 + 11.2^2 + 12.8^2} * 10^{-19}$$

$$F = 23.35 * 10^{-19} N$$

12. **Problema de repaso.** Una varilla de masa m y de radio R descansa sobre dos rieles paralelos que están separados por una distancia d y que tienen una longitud L . La varilla conduce una corriente I en la dirección que se muestra la figura 121, y rueda a lo largo de los rieles sin resbalar. Un campo magnético uniforme B está dirigido perpendicularmente a la varilla y a los rieles. Si parte del reposo, ¿cuál será la rapidez de la varilla cuando se salga de los rieles? (Serway & Jewett, Jr, Física para ciencias e ingeniería, 2008)

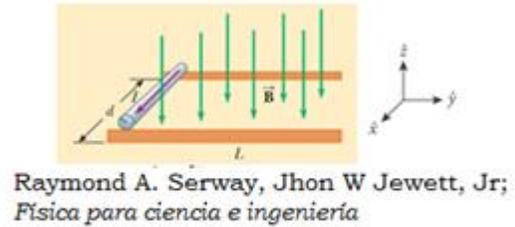


Figura 121.

Solución: La fuerza magnética que experimenta un conductor que transporta una corriente está dada por

$$\vec{F} = I(\vec{l} \otimes \vec{B})$$

De acuerdo con la gráfica se tiene

$$\vec{F} = I(d \hat{i} \otimes B(-\hat{k}))$$

$$\vec{F} = -IBd(\hat{i} \otimes \hat{k})$$

$$\vec{F} = -IBd(-\hat{j}) = IBd(\hat{j})$$

De acuerdo con el resultado se tiene que la fuerza magnética es la encargada de acelerar la varilla sobre los rieles, pero se tiene que la varilla está rotando, lo cual quiere decir que además de la fuerza magnética actuando sobre la varilla debe de existir otra fuerza causante de la rotación (torque), esta fuerza, es la fuerza de fricción existente entre la varilla y los rieles. En la figura 122, se ilustran todas las fuerzas actuantes sobre la varilla, además del sentido de rotación y la aceleración.

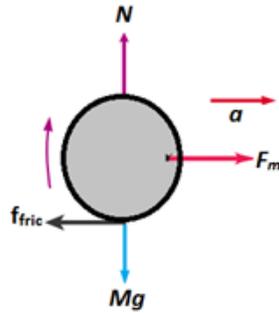


Figura 122. Autoría propia

Aplicando la segunda ley de Newton se tiene

$$\sum F_y = ma$$

$$F_m + f_{fric} = ma$$

Reemplazando la fuerza magnética,

$$IBd + f_{fric} = ma \quad (*)$$

Ahora debemos obtener la fuerza de fricción, y no podemos utilizar la típica ecuación

$$f_{fric} = \mu N$$

Dado que no conocemos cual es el coeficiente de fricción, por lo tanto, lo que demos es utilizar la segunda ley de Newton para la rotación

$$\sum \tau_{cm} = I_{cm} \alpha$$

De donde I_{cm} , es el momento de inercia de la varilla respecto al centro de masa y α es la aceleración angular. La única fuerza que causa torque respecto al centro de masa es la fricción

$$Rf_{fric} = \frac{1}{2}mR^2 * \frac{a}{R}$$

Se ha reemplazado la aceleración angular ($\alpha = a/R$). Simplificando, se obtiene

$$f_{fric} = \frac{1}{2}ma$$

Reemplazando ahora en la ecuación (*), se tiene

$$IBd + \frac{1}{2}ma = ma$$

Despejando para la aceleración

$$a = \frac{2IBd}{m}$$

Ahora utilizando la ecuación

$$V_f^2 = V_0^2 + 2as$$

Dado que la varilla parte del reposo y la distancia recorrida es L, se tiene

$$V_f^2 = 2aL$$

Ahora reemplazando la aceleración y despejando para V

$$V_f^2 = 2 * \frac{2IBd}{m} * L = \frac{4IBdL}{m}$$

$$V_f = \sqrt{\frac{4IBdL}{m}}$$

$$V_f = \sqrt{\frac{4IBdL}{m}} = 2\sqrt{\frac{IBdL}{m}}$$

13. A conductor suspended by two flexible wires as shown in Figure 123 has a mass per unit length of 0.0400 kg/m. What current must exist in the conductor in order for the tension in the supporting wires to be zero when the magnetic field is 3.60 T into the page? What is the required direction for the current? (Serway & Jewett, Jr., 2019)



Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr;
Física para ciencia e ingeniería

Figure. 123

Solución: Para que la tensión en los alambres sea cero la fuerza magnética en el conductor debe ir hacia arriba (dirección vertical), para contrarrestar el peso de la barra.

La fuerza magnética sobre un conductor que transporta una corriente está dada por:

$$\vec{F} = I(\vec{l} \otimes \vec{B})$$

Si tomamos las direcciones mostradas en la figura 124, y dado que el campo magnético está dirigido en la dirección $(-\hat{i})$ y sabiendo que la fuerza magnética debe ir en dirección (\hat{k}) , la única opción que queda para la dirección de la corriente es (\hat{j}) , esto debido al producto cruz entre la longitud y el campo.

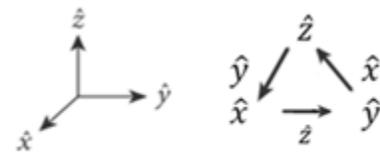


Figura 124. Autoría propia

$$\vec{F} = I(L(\hat{j}) \otimes B(-\hat{i}))$$

$$\vec{F} = IBL(\hat{k})$$

En la figura 125, se ilustra el diagrama de fuerzas actuantes sobre el conductor

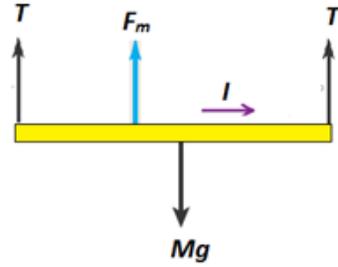


Figura 125. Autoría propia

Aplicando la segunda ley de Newton al conductor se tiene

$$\sum F_z = 0$$

$$F_m + 2T - mg = 0$$

Reemplazando la fuerza magnética y recordando que la tensión debe ser cero se tiene

$$IBL = mg$$

$$I = \frac{mg}{LB}$$

Recordando que $\lambda = m/L$, es la densidad lineal de masa del conductor

$$I = \frac{\lambda g}{B}$$

Reemplazando los valores dados, se tiene:

$$I = \frac{0.04 * 9.8}{3.6}$$

$$I = 0.11 \text{ A}$$

LEY DE AMPERE

En 1819 el danés Hans Christian Oersted (1777 – 1851) encontró accidentalmente que una corriente eléctrica producía un campo magnético. Oersted realizó este descubrimiento de manera accidental cuando se encontraba trabajando en su laboratorio. Este observó que la aguja de una brújula que tenía en su mesa de trabajo se desviaba del norte cada vez que hacía pasar una corriente por un conductor, este hecho lo llevó a formular que las corrientes eléctricas eran fuentes de campo magnético. Al poco tiempo del descubrimiento realizado por Oersted los científicos Franceses Félix Savart (1791 – 1841) y Jean Baptiste Biot (1774 – 1862) llevaron a cabo experimentos cuantitativos en lo que tiene que ver con la fuerza ejercida sobre un alambre conductor que transporta una corriente por un imán, el producto de estas investigaciones es lo que hoy conocemos como *ley de Biot – Savart*, que no es más que una expresión matemática con fundamentos experimentales que permite calcular el campo magnético debido a un elemento de corriente a una distancia r de este (GIANCOLI, 2009).

Si se toma un trozo de conductor dl que transporta una corriente I este producirá un pequeño campo magnético en un punto P , ubicado a una distancia r de él. La situación se ilustra en la figura 126.

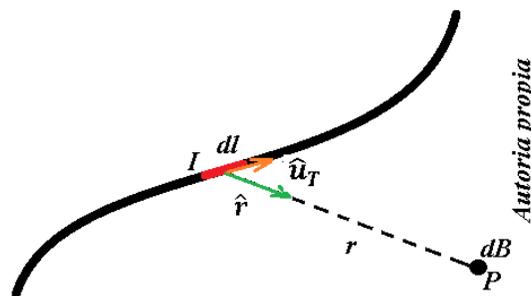


Figura 126. Campo magnético generado por una corriente. Autoría propia

La expresión que nos permite obtener el campo magnético en P generado por este elemento de conductor es

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\hat{u}_T \otimes \hat{r}}{r^2} dl$$

La cual recibe el nombre de Ley de Biot-Savart, en esta ecuación se tiene que:

- \hat{u}_T : Es un vector unitario tangente en todo punto al conductor que apunta en la dirección de la corriente
- \hat{r} : Es un vector unitario que apunta del elemento de corriente al punto donde se va a calcular el campo
- dl : es elemento de longitud del conductor
- r : es la distancia desde el elemento de conductor hasta el punto donde se va a calcular el campo
- $d\vec{B}$: Elemento de campo producido por la corriente en el punto P , y es perpendicular tanto \hat{u}_T como a \hat{r} .
- I : Es la corriente transportada por el conductor
- μ_0 : Es una constante llamada *permeabilidad del espacio libre o del vacío*, y tiene un valor de $4\pi * 10^{-7} Tm/A$

El campo magnético total debido a un conductor determinado se obtiene sumando las contribuciones de cada trozo de conductor, esto es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\hat{u}_T \otimes \hat{r}}{r^2} dl$$

Donde la integral se realiza sobre toda la longitud del conductor.

Antes de continuar se dará una breve definición de las integrales de línea

Definición: Sea \vec{A} un campo vectorial continuo, y sea C una curva suave que une los puntos a y b . Sea $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ el vector posición, $t \in [a, b]$, una parametrización de C . La integral de línea de \vec{A} a lo largo de C se define como

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Si \vec{A} es la fuerza \vec{F} que actúa sobre una partícula (cuerpo) que se mueve a lo largo de C , esta integral de línea es el trabajo realizado por la fuerza para llevar la partícula desde a hasta b . Ahora bien, si C es una curva cerrada que no se interseca consigo misma en ningún punto, se acostumbra a denotar la integral alrededor de C del modo como:

$$\Lambda_A = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \oint_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

Esta integral recibe el nombre de *circulación de \vec{A} sobre C* . (Weber & Arfken, 2003)

Ahora bien, si el campo vectorial \vec{A} , es el campo magnético \vec{B} producido por una corriente, entonces se tiene que la circulación del campo magnético sobre C es.

$$\Lambda_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

De acuerdo con la ley de Biot-Savart se tiene que las líneas de campo magnético debido a una corriente son lazos cerrados. Si calculamos esta integral sobre la curva C que encierre una corriente, figura 127(a) se obtiene

$$\Lambda_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encerrada}$$

La anterior ecuación se conoce como *Ley de Ampère*¹, en honor al físico y matemático francés André-Marie Ampère (1775 – 1836).

Si la trayectoria C no encierra la corriente, figura 127(b), el resultado será cero, esto es

$$\Lambda_B = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0$$

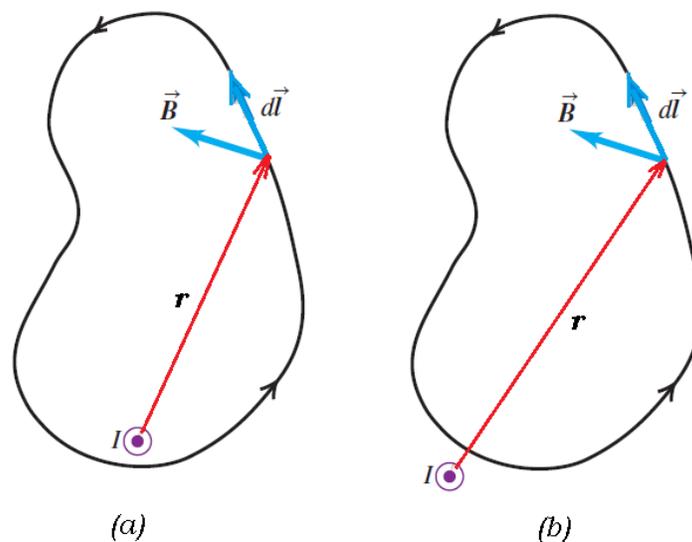


Figura 127. Autoría propia

La ley de Ampère, puede enunciarse como sigue: (Serway & Jewett, Jr., 2019)

¹ El origen de la ley de Ampère se dio en la ciencia del siglo xix, en la cual una “carga magnética” (la analogía supuesta para una carga eléctrica aislada) se imaginaba en movimiento alrededor de una línea de campo circular. El trabajo realizado sobre la carga se relacionó con $\vec{B} \cdot d\vec{l}$, de la misma manera que el trabajo realizado al mover una carga eléctrica en un campo eléctrico se relacionó con $\vec{E} \cdot d\vec{l}$. Por tanto, la ley de Ampère, un principio válido y útil, ¡se originó a partir de un cálculo de trabajo erróneo y olvidado! (Serway & Jewett, Jr., Física para ciencias e ingeniería, 2018)

La integral de línea de $\vec{B} \cdot d\vec{l}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a $\mu_0 I_{encerrada}$, donde $I_{encerrada}$ es la corriente total constante que pasa a través de cualquier superficie limitada por la trayectoria cerrada:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encerrada}$$

La ley de Amperè es una herramienta útil para obtener los campos magnéticos para cualquier configuración de corriente continua, siempre y cuando podamos hallar una trayectoria C (trayectoria amperiana) que encierre la corriente y que en cualquier punto de esta el campo magnético tenga el mismo valor, exigencia esta que escapa a nuestros límites y conocimientos matemáticos (hasta aquí adquiridos), Por lo tanto, sólo es útil para calcular el campo magnético de aquellas configuraciones de corriente que posean un alto grado de simetría. Su uso es similar al de la ley de Gauss para el cálculo de campos eléctricos con distribuciones de carga altamente simétricas.

PROBLEMAS RESUELTOS DE LEY DE AMPERE

1. El Niobio (Nb) al igual que el plomo (Pb), el mercurio (Hg) y el aluminio (Al) es un superconductor de tipo I (al volverse superconductores crean corrientes superficiales que impiden que un campo magnético externo los penetre, esto es conocido como el *efecto Meissner*). Fueron los primeros superconductores que se descubrieron en el marco de la teoría BCS. Estos materiales se vuelven superconductores por debajo de cierta temperatura, llamada *temperatura critica*, T_c . El niobio se vuelve superconductor cuando su temperatura es inferior a los 9K. Esta superconductividad se destruye cuando el campo magnético superficial es superior a 0,100 T ($10^3 G$). ¿Qué corriente máxima puede llevar un alambre de niobio de 5.00 mm (calibre 4) manteniéndose como superconductor en ausencia de cualquier campo magnético externo?

Solución. Como se sabe las corrientes son fuentes de campo magnético, por lo tanto, nuestro alambre al transportar una corriente generara un campo magnético. Dada la simetría cilíndrica del alambre se puede aplicar la ley de Ampere para determinar el campo magnético sobre su superficie

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Al solucionar esta integral sobre una trayectoria Amperiana de radio R y que encierre la corriente da

$$B = \frac{\mu_0 I_{enc}}{2\pi r}$$

Para nuestro caso rodeamos $I_{enc} = I_{max}$. Despejando la corriente máxima se tiene

$$I_{max} = \frac{2\pi RB}{\mu_0}$$

Reemplazando los datos suministrados por el problema

$$I_{max} = \frac{2\pi * (2,5 * 10^{-3} m) * 0,1 T}{(4\pi * 10^{-7} T * A/m)}$$

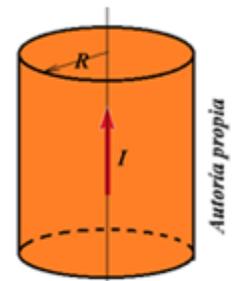


Figura 128.

$$I_{max} = 1250 \text{ A}$$

2. La figura 129, muestra un cable coaxial. El conductor interior está rodeado por una capa de caucho, la cual está rodeada por un conductor exterior, que a su vez está rodeado por otra capa de caucho.

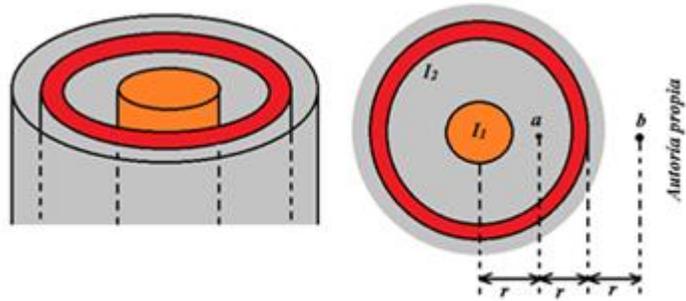


Figura 129

En una aplicación particular, la corriente en el conductor interno es $I_1 = 2.00 \text{ A}$ hacia fuera de la página y la corriente en el conductor externo es de $I_2 = 2I_1 = 4.00 \text{ A}$ hacia dentro de la página. Suponiendo una distancia $r = 1.50 \text{ mm}$, determine la magnitud y la dirección del campo magnético en los puntos (a) a y (b) b.

Solución: Este es otro ejemplo clásico de aplicación de la ley de Ampere. De acuerdo con esta se tiene que el campo magnético debido a una corriente rectilínea a una distancia r de esta es

$$B = \frac{\mu_0 I_{enc}}{2\pi r}$$

(a) Para este caso se traza una trayectoria Amperiana que encierra la corriente I_1 . tal como se ilustra en la figura 130, que pasa por el punto a , que es donde se nos pide calcular el campo. Utilizando la regla de la mano derecha se tiene que al colocar el pulgar en la dirección de la corriente (saliendo del plano de la hoja) y cerrar la mano se tiene que el campo es tangente al punto a en la dirección que se indica la figura.

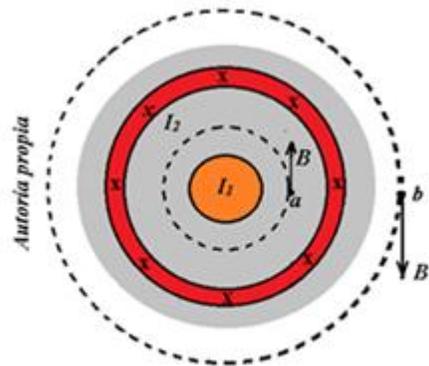


Figura 130.

Para la magnitud del campo en el punto se tiene ($r = 1,50 \text{ mm} = 1,5 * 10^{-3} \text{ m}$) se tiene

$$B_a = \frac{4\pi * 10^{-7} * 2}{2\pi * (1,5 * 10^{-3})}$$

$$B_a = 2,67 * 10^{-4} \text{ T} = 267 \mu\text{T}$$

(b) Para el campo en el punto b se procede igual que en a , pero ahora la trayectoria Amperiana encierra las dos corrientes por lo que la corriente encerrada será la suma algebraica de estas dos corrientes (I_1 e I_2). Y la distancia al punto b es $3r$.

$$B_b = \frac{\mu_o(I_1 - I_2)}{2\pi(3r)}$$

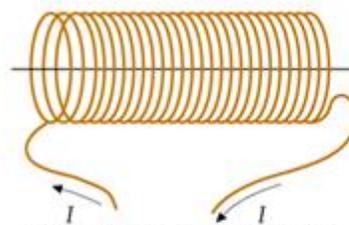
$$B_b = \frac{\mu_o(I_1 - 2I_1)}{2\pi(3r)} = - \frac{\mu_o I_1}{2\pi(3r)}$$

$$B_b = - \frac{4\pi * 10^{-7} * 2}{2\pi * (3 * 1,5 * 10^{-3})}$$

$$B_b = -0,88810^{-4} \text{ T} = -8,89 * 10^{-5} \text{ T} = -88,9 \mu\text{T}$$

Tal como se puede observar en la figura en este punto la dirección del campo es contraria a la dirección del campo en a , esto es debido a que la corriente I_2 es mayor que I_1 pero va en dirección opuesta a esta.

3. *Campo magnético de un solenoide.* Un solenoide es un arreglo de N espiras de corriente alrededor de un cilindro (en la inmensa mayoría de los casos) de radio r y longitud l . una condición que se exige es que la longitud del solenoide sea mucho mayor que el radio de este (solenoides ideales). En la figura 131, se ilustra un solenoide típico.



Solenoides. figura tomada de <https://naukas.com/px/uploads/2014/06/solenoides.gif>

Figura 131.

El campo magnético del solenoide se obtiene de la superposición de los campos de las espiras que lo conforman. Este campo en el interior es aproximadamente uniforme y fuerte, pero en el exterior es muy débil, para nuestro caso se tomará como cero.

Para obtener el campo magnético del solenoide se empleará la ley de Ampere

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I_{enc}$$

Donde la trayectoria l encierra la corriente. Para nuestro caso la trayectoria elegida es un rectángulo que encierra cierto número de espiras, la figura 132, ilustra el un corte transversal del solenoide, con la trayectoria Amperiana y las líneas de campo. Donde los *puntos* representan la corriente saliendo del plano de la página y las *cruces* donde entra.

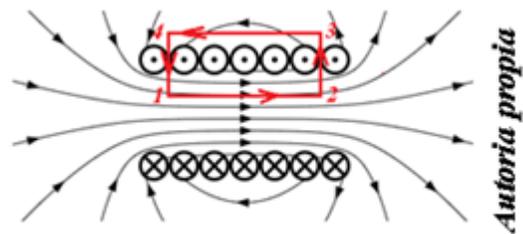


Figura 132.

La integral de línea de la Ley de Ampere se puede escribir como

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I_{enc}$$

Tal como se puede ver en la figura las integrales

$$\int_2^3 \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

Esto debido a que el campo magnético es perpendicular a la trayectoria ($d\vec{l}$), por lo tanto, el producto punto es cero. La integral de 3 a 4 también es cero,

puesto el *camino* está fuera del solenoide y el campo en esta región es cero. Con lo anterior solo nos queda

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I_{enc}$$

Tal como se observa en la figura el campo es paralelo al lado 1-2, por lo que el producto

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B dl$$

Y puesto que estamos al interior del solenoide donde el campo es uniforme, entonces B sale de la integral, esto es

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \int_1^2 dl = \mu_o I_{enc}$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = B l_{solenoides} = \mu_o NI$$

La integral se ha realizado sobre toda la longitud del solenoide donde la trayectoria Amperiana encierra las N espiras de corriente, por lo que la corriente encerrada es NI , entonces el campo magnético al interior del solenoide muy cerca del eje de este dado por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o NI}{L} = \mu_o n I$$

De donde $n = N/L$, densidad de espiras por unida de longitud.

4. Dos alambres largos paralelos transportan corrientes de $I_1 = 3.00 \text{ A}$ e $I_2 = 6.00 \text{ A}$ en las direcciones indicadas en la figura 133. (a) Determine la magnitud y dirección del campo magnético en el punto medio entre los alambres. (b) Encuentre la magnitud y dirección del campo magnético en el punto P, situado en $a = 18.0 \text{ cm}$.

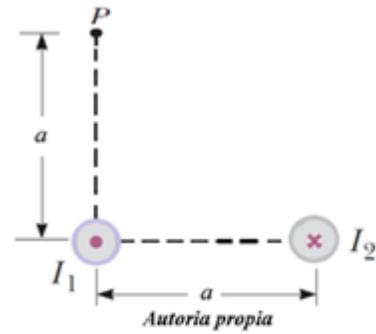


Figura 133.

Solución: En cualquier punto el campo neto es la suma de los campos producidos por I_1 e I_2 . Para aplicar la ley de Ampere para solucionar este problema se debe trazar una trayectoria Amperiana que pase por el punto donde se quiere calcular el campo y que además encierre la corriente, si lo anterior no es posible entonces se dice que no se puede aplicar la ley de Ampere para calcular el campo de esta corriente y se debe emplear otra técnica. Es de anotar que la ley de Ampere es aplicable en aquellos casos donde la distribución de corriente es altamente simétrica, como en el caso de alambres largos y rectos, como en el caso que nos ocupa. En la figura 134,

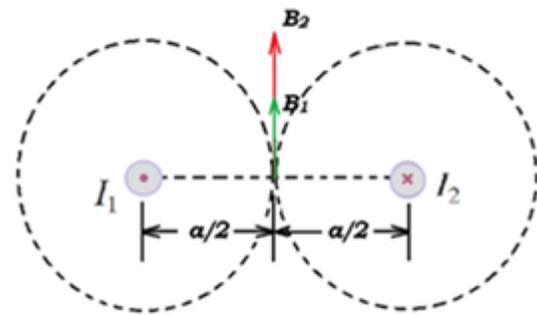


Figura 134. Autoría propia

se pueden observar las trayectorias Amperianas de las dos corrientes (círculos centrados en la corriente), para saber la dirección de campo magnético se utiliza la regla de mano derecha, el pulgar de esta mano va en la dirección de la corriente y se cierra la mano y en la dirección tangente a la que se cierra la mano ira el campo, tal como se ve en la figura donde los campos B_1 y B_2 , corresponden a I_1 e I_2 respectivamente, por lo expuesto anteriormente se tiene

$$\vec{B} = \vec{B}_1\hat{j} + \vec{B}_2\hat{j}$$

El campo magnético a una distancia r debido a una corriente rectilínea esta dado por

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_{enc}}{2\pi r}$$

Para nuestro caso para ambas corrientes $r = a/2$

Reemplazando en la ecuación de arriba se tiene

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a/2} \hat{j} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a/2} \hat{j}$$

Con $I_2 = 2I_1$, $I_1 = 3,00A$, $a = 18,00 \text{ cm} = 0,18 \text{ m}$, $\mu_0 = 4\pi * 10^{-7} \text{ Tm/A}$

$$\vec{B} = \frac{3\mu_0 I_1}{\pi a} \hat{j}$$

$$\vec{B} = \frac{3 * 4\pi * 10^{-7} * 3}{\pi * 0,18} \hat{j}$$

$$\vec{B} = 2 * 10^{-5} \text{ T} = 20\mu\text{T} \hat{j}$$

Ahora se procederá a calcular el campo en el punto P, para hacerlo se procederá de igual manera que el anterior ítem. Se trazarán circunferencias desde I_1 e I_2 hasta P. Tal como se ilustra en la figura 135. Tal como se ha venido mencionando el campo magnético es tangente a la correspondiente circunferencia, el campo B_2 es perpendicular a r (es el radio de la circunferencia azul centrada en I_2), puesto que cualquier tangente es perpendicular al radio. Ahora bien, el radio es la diagonal de un cuadrado por lo que se tiene que $\theta = 45^\circ$. La circunferencia roja tiene centro en I_1 y encierra esta corriente. El campo B_1 producido por I_1 ira en dirección horizontal hacia la izquierda. Se recalca que se ha utilizado la regla de

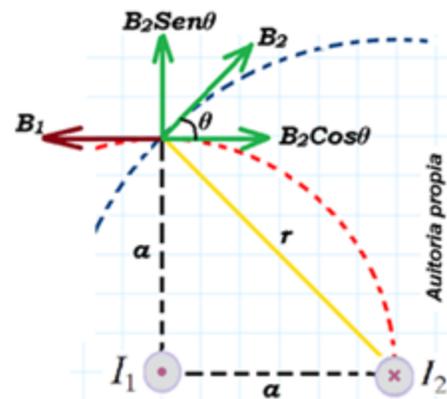


Figura 135. Autoría propia

la mano derecha para determinar la dirección de los campos magnéticos.

la mano derecha para hallar la dirección de los campos, tal como en el caso anterior. Con lo dicho anteriormente se tiene:

$$B_{Px} = B_2 \cos \theta - B_1$$

$$B_{Px} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \cos \theta - \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

De donde: $I_2 = 2I_1$, $r = a\sqrt{2}$ y $\cos \theta = \text{Sen} 45^\circ = \text{Cos} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$B_{Px} = \frac{2\mu_0 I_1}{2\pi a\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

$$\mathbf{B}_{Px} = \mathbf{0}$$

$$B_{Py} = B_2 \text{Sen} \theta$$

$$B_{Py} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \text{Sen} \theta$$

$$B_{Py} = \frac{2\mu_0 I_1}{2\pi a\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathbf{B}_{Py} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$$

Reemplazando los valores dados se tiene

$$B_{Py} = \frac{4\pi * 10^{-7} * 3}{2\pi * 0,18} = 3,3\bar{3} * 10^{-6} T$$

$$\mathbf{\vec{B}}_p = 3,3\bar{3} * 10^{-6} T \hat{j} = 3,3\bar{3} \mu T \hat{j}$$

5. Un instructor de orientación y su alumno leen una brújula debajo de una línea de transmisión ubicada a 6.00 m sobre el suelo y que transporta una corriente de 750 A en dirección horizontal de sur a norte. a) Determine la magnitud y dirección del campo magnético en un punto sobre el suelo directamente debajo de la línea. b) El alumno le sugiere a su instructor que caminen 50 m para

evitar lecturas inexactas de la brújula causadas por el efecto de la corriente. Si se toma $50 \mu T$ (0,5 G) como valor promedio para la magnitud del campo de la Tierra, ¿es realmente un problema la corriente?

Solución: Como ya se mencionó con anterioridad el campo magnético de una corriente rectilínea (una línea de transmisión para nuestro caso) está dado por (ley de Ampere)

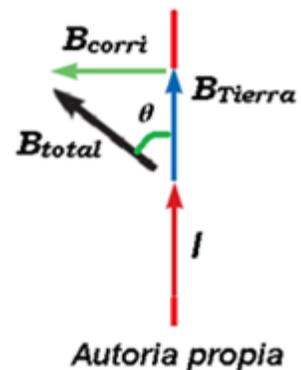
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Cuando se está debajo de la corriente $r = 6.00 \text{ m}$, entonces se tiene que

$$B = \frac{4\pi * 10^{-7} * 750}{2\pi * 6}$$

$$B = 2,5 * 10^{-5} T = 25 \mu T$$

Tal como se puede ver al comparar este resultado con el valor del campo magnético de la tierra se tiene que este es un valor considerable (la mitad) respecto del campo de la tierra por lo tanto la lectura de la brújula se verá afectada por el campo debido a la línea. En la figura 136 se ilustra tal situación, donde la flecha negra ilustra el campo total (suma del campo debido a la corriente y al de la tierra), y es la dirección en la que apuntara la aguja de la brújula cuando estén realizando la lectura cuando están debajo de la línea



Autoria propia
Figura 136.

$$\text{tang}\theta = \frac{B_{\text{corri}}}{B_{\text{tierra}}}$$

$$\theta = \text{tang}^{-1}\left(\frac{B_{\text{corri}}}{B_{\text{tierra}}}\right)$$

Reemplazando los datos se tiene

$$\theta = \text{tang}^{-1}\left(\frac{25 \mu T}{50 \mu T}\right)$$

$$\theta = 26,565^\circ$$

Ahora bien, cuando el estudiante le sugiere a su instructor caminar 50 m deben hacerlo en dirección perpendicular a la corriente. Un corte transversal de esta situación se ilustra en la figura 137. Ahora se procederá a calcular el ángulo β .

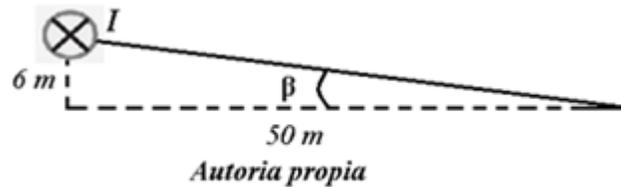


Figura 137.

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{6}{50}\right)$$

$$\beta = 6,84^\circ$$

Dado que este ángulo es muy pequeño se podría considerar ahora que la corriente y el punto donde se encuentran las dos personas están sobre el mismo plano, la figura 138,

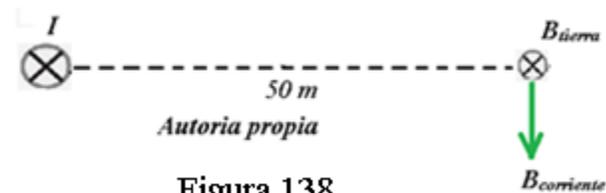


Figura 138.

ilustra tal situación. Por lo tanto, el campo magnético de la corriente no afectará la dirección o rumbo de los participantes pues este campo el efecto que tendrá sobre la brújula es básicamente es *presionar* la aguja sobre el tablero. De acuerdo con lo planteado lo que deben los participantes es alejarse lo que más puedan de la línea de transmisión en dirección perpendicular a esta para que el campo magnético creado por la corriente no afecte a la aguja de la brújula y de lecturas equivocadas.

- Dos conductores de cobre largos y rectos de diámetro d cuelgan de cuerdas de longitud L , que están sujetas de un punto común O , tal como se ilustra

en la figura 139. Los conductores transportan corrientes iguales pero opuestas. Cuando los alambres se encuentran en equilibrio los alambres forman un ángulo θ ¿Cuál es la corriente que circula por los alambres?

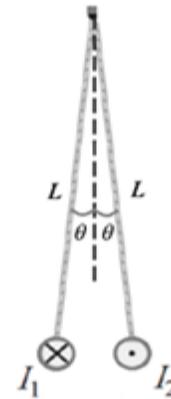


Figura 139. Autoría propia

Solución: Para solucionar este problema hay que tener en cuenta que cada corriente crea su propio campo magnético (dado por la ley de Ampere), por lo tanto, cada corriente se encuentra inmersa en el campo magnético de la otra, tal como es sabido cuando una corriente se encuentra en un campo magnético esta experimentara una fuerza, la cual está dada por

$$F = IL(\hat{u}_T \times \vec{B})$$

De donde L es la longitud de la corriente, \hat{u}_T es un vector tangente a la corriente y B el campo en la cual se encuentra inmersa la corriente.

La figura 140, ilustra el diagrama de cuerpo libre para cada corriente

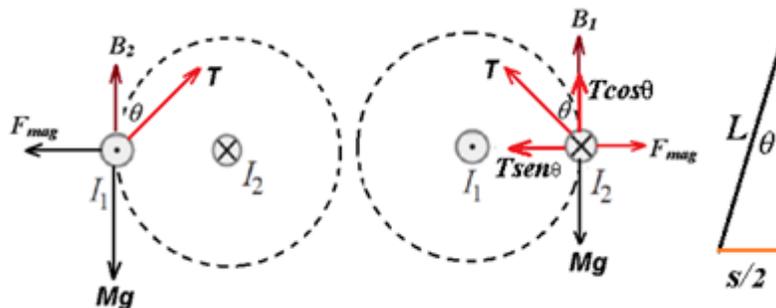


Figura 140. Autoría propia

Dado que las corrientes están en equilibrio se procederá a aplicar la segunda ley de Newton para la corriente I_2 , que está afectada por el campo magnético de I_1 .

$$\sum F_y = 0$$

$$T \cos \theta - Mg = 0$$

$$T = \frac{Mg}{\cos\theta}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{mag} - T\sin\theta = 0$$

Reemplazando las expresiones para la fuerza magnética y la tensión se tiene

$$I_2 L B_1 - \frac{Mg}{\cos\theta} \sin\theta = 0$$

$$I_2 L \frac{\mu_0 I_1}{2\pi S} - Mg * \tan\theta = 0$$

De la figura se tiene que $S = 2L\sin\theta$ y puesto que $I_1 = I_2 = I$, entonces se tiene

$$\frac{\mu_0 L I^2}{2\pi * 2L\sin\theta} = Mg * \tan\theta$$

Despejando para I se tiene

$$I = \sqrt{\frac{4\pi * \sin\theta * Mg * \tan\theta}{\mu_0}}$$

La anterior es la expresión para la corriente que circula por los alambres.

INDUCCION MAGNETICA

En muchas ocasiones nos hemos hecho las siguientes preguntas: ¿Cómo funcionan las tarjetas de crédito o débito?, ¿Cómo funcionan las trampas de velocidad?, ¿cómo funcionan los detectores de metales?, ¿Cómo funcionan los detectores contra hurtos en los almacenes?, etc. La respuesta o explicación al funcionamiento de todos estos dispositivos y muchos otros es muy sencilla: *La ley de inducción de Faraday*.

Michael Faraday (1791 - 1867), fue un físico y químico británico que estudio en detalle los fenómenos electromagnéticos, en 1831 estableció la ley que hoy lleva su nombre; la cual establece que:

la variación del flujo magnético a través de una espira lleva a que en esta aparezca una fem o corriente inducida, a pesar de que esta no esté conectada a fuente alguna. (YOUNG & FREEDMAN, Física universitaria con fisica moderna volumen 2, 2013)

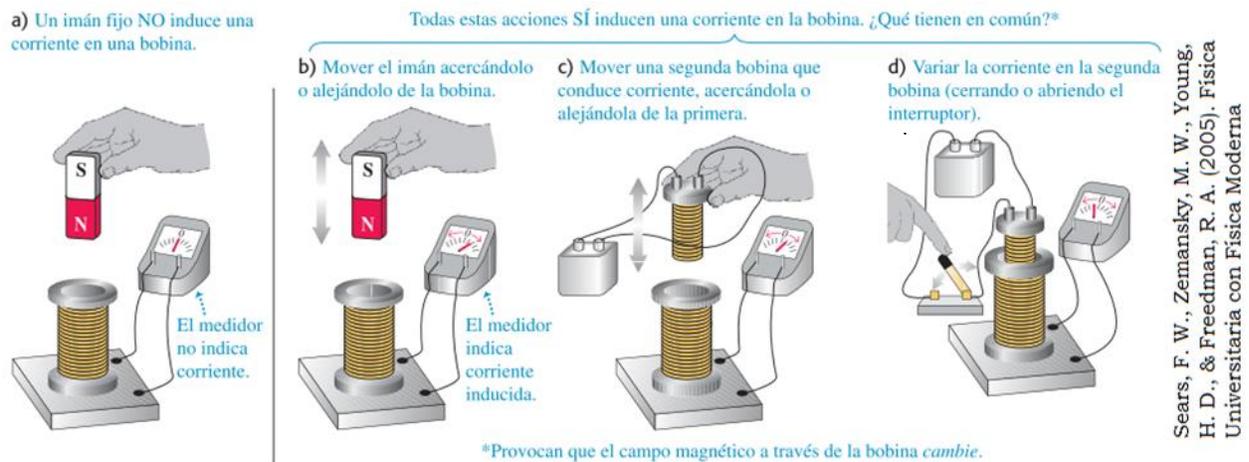


Figura 141. Demostración de la existencia de la corriente inducida

La figura 141, ilustra algunas situaciones en las cuales se induce una corriente.

Matemáticamente la ley de Faraday se puede escribir como

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

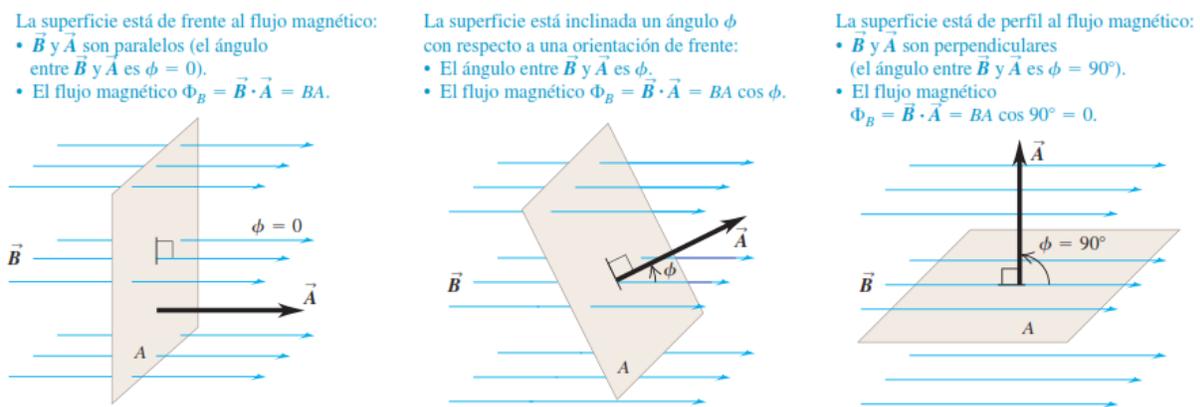
De donde Φ_B es el flujo magnético a través de la espira. El signo menos se explicará posteriormente.

Por definición se tiene que el flujo magnético a través de un área dada \mathbf{A} es

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\Phi_B = B A \cos\theta$$

De donde θ es el ángulo formado entre el campo magnético y la normal a la superficie a través de la cual se quiere hallar el flujo. La figura 142, ilustra la forma como se realiza el cálculo del flujo magnético a través de una superficie plana.



Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D., & Freedman, R. A. (2005). Física Universitaria con Física Moderna

Figura 142. Cálculo del flujo magnético a través de una superficie plana

Reemplazando la definición de flujo magnético en la expresión para la fem inducida se tiene

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d}{dt}(B A \cos\theta)$$

Al realizar la derivada se tiene que esta es la de un triple producto, por lo tanto, se tiene

$$\varepsilon_{ind} = -A \cos\theta \frac{dB}{dt} - B \cos\theta \frac{dA}{dt} + AB \sin\theta \frac{d\theta}{dt}$$

Realizando una interpretación de la anterior ecuación se tiene que se puede dar una fem inducida en los siguientes casos

- Cuando la espira está inmersa en una región donde el campo magnético varía con el tiempo $\frac{dB}{dt}$
- Si el área de la espira cambia con el tiempo $\frac{dA}{dt}$
- Si la espira gira en el campo magnético, o su orientación cambia respecto a la del campo magnético $\frac{d\theta}{dt}$

El signo menos de la ley de Faraday tiene su explicación mediante la *ley de Lenz* (Heinrich Friedrich Emil Lenz 1804 -1865), la cual establece que:

La dirección de la fem inducida es tal que crea una corriente inducida que a su vez crea un campo magnético que se opone a la variación aumento o disminución del flujo magnético a través de la espira. (Serway & Jewett, Jr., 2019)

En la figura 143, se ilustra la dirección en que se crea la corriente inducida en una espira

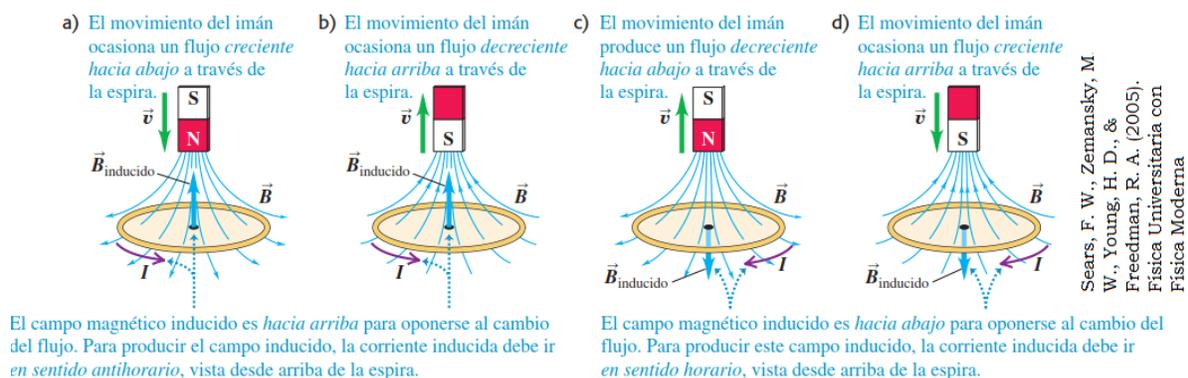


Figura 143. Dirección de la corriente inducida en una espira debido a la variación del flujo magnético.

Hay que anotar que la fem inducida no solo se presenta por la variación del flujo magnético a través de una espira. Se puede presentar un a fem inducida en los extremos de una varilla conductora cuando esta se desplaza con una velocidad \mathbf{v} en una región de campo magnético, figura 123 (a). Lo que sucede es que las cargas libres del conductor (electrones) experimentan la acción del campo magnético, y se empieza a acumular un exceso de carga positiva en la parte superior de la varilla, y un exceso de carga negativa en la parte inferior, lo cual hace que al interior de la varilla aparezca un campo eléctrico inducido que afecta a las cargas libres. Es decir, las cargas libres van a estar bajo el efecto de dos campos, el campo magnético y el campo eléctrico inducido, los cuales generan fuerzas opuestas sobre los electrones. El movimiento de cargas cesa cuando la fuerza neta sobre estas es cero. Cuando esto ocurre la diferencia de potencial entre los extremos de la barra está dada por

$$V_{ab} = \mathcal{E}L = vBL$$

Ahora bien, si la barra se desliza sobre un conductor en forma de U, figura 144 (a) el campo magnético no ejerce fuerza alguna sobre las cargas del conductor en forma de U, pero las cargas acumuladas en los extremos de la varilla empiezan a

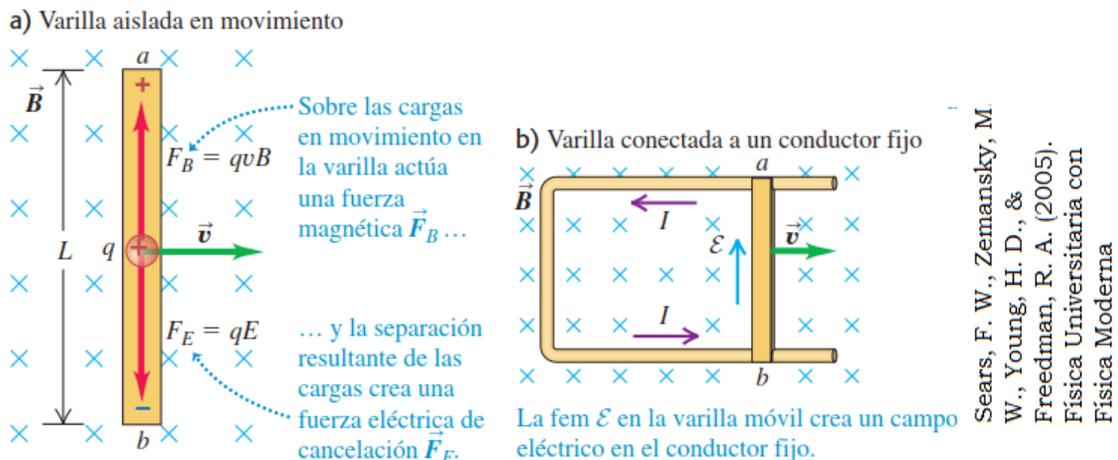


Figura 144. Fem en movimiento

circular por el conductor en U debido a las diferencias de potencial, por lo cual se crea una corriente inducida, llamada fuerza electromotriz de movimiento y su naturaleza diferente a la naturaleza de la fem de la ley de Faraday, pues esta se debe a la variación del flujo.

Para finalizar se dirá que la ley de inducción de Faraday también se conoce como ley de Faraday – Henry, en honor al físico estadounidense Joseph Henry (1797 - 1878), quien de manera independiente llegó a los mismos resultados de Faraday.

PROBLEMAS RESUELTOS DE INDUCCION MAGNETICA

1. Un solenoide con 200 vueltas y área de la sección transversal de 60 cm^2 tiene un campo magnético de 0.60 T a lo largo de su eje. Si el campo está confinado dentro del solenoide y cambia a razón de 0.20 T/s , la magnitud de la diferencia de potencial inducida en el solenoide es (Bauer & Westfall, 2011)

- a) 0.0020 V . b) 0.02 V . c) 0.001 V . d)
 0.24 V .

Solución: La *FEM* inducida es debida a la variación del flujo magnético a través del solenoide y estaría dada por:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$

$$\Phi_B = B \cdot S$$

En nuestro caso la variación del flujo se debe única y exclusivamente a la variación del campo, magnético ya que el área ($S = \pi r^2$) de la sección transversal del solenoide permanece constante, esto es:

$$\varepsilon_{ind} = -SN \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

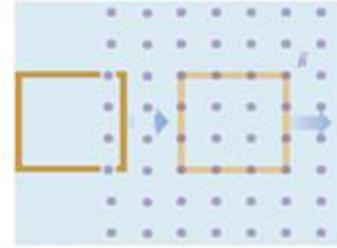
Donde N , es el número de vueltas.

$$\varepsilon_{ind} = 0.006 * 200 * 0.20$$

$$\varepsilon_{ind} = 0.24 \text{ V}$$

De acuerdo con lo anterior **la respuesta correcta es la opción d.**

2. El bucle rectangular de alambre en la figura 145 se lleva a aceleración constante de una región de cero campos magnéticos a una región de campo magnético uniforme. Durante este proceso, la corriente inducida en el bucle: (Bauer & Westfall, 2011)



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. Física; para ingenierías y ciencias con física moderna

Figura 145.

- a) Es cero.
- b) Es igual a algún valor constante diferente de cero.
- c) Crece linealmente con el tiempo.
- d) Crece exponencialmente con el tiempo.
- e) Crece linealmente con el cuadrado del tiempo.

Solución: La FEM inducida debido a la variación del flujo magnético a través de la espira estará dada por:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$

$$\Phi_B = B \cdot S = Bwx$$

De donde S, es el área de la espira, w, el alto, y, x es la porción de espira que está ingresando en un momento dado a la región de campo. Reemplazando en la ecuación para la FEM se tiene:

$$\varepsilon_{ind} = -Bw \frac{dx}{dt}$$

$$\varepsilon_{ind} = -Bwv$$

De donde $v = dx/dt$, es la velocidad del laso. Para un movimiento con aceleración constante

$$v = v_0 + at$$

Reemplazando en la expresión para la FEM

$$\varepsilon_{ind} = -Bw(v_0 + at)$$

Aplicando la Ley de Ohm a la espira (con resistencia R), se tiene que la corriente inducida será:

$$I_{ind} = \frac{Bw}{R} (v_0 + at)$$

De acuerdo con el resultado anterior se concluye que **la respuesta correcta es la opción c).**

3. ¿Cuál de las siguientes acciones induce una corriente en un bucle de alambre en un campo magnético uniforme? (Bauer & Westfall, 2011)
- a) Disminuir la intensidad de campo.
 - b) Rotar el bucle alrededor de un eje paralelo al campo.
 - c) Mover el bucle dentro del campo.
 - d) Todas las anteriores.
 - e) Ninguna de las anteriores.

Solución: La FEM inducida debido a la variación del flujo magnético a través de la espira estará dada por:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$

$$\Phi_B = B \cdot S = Bs \cos \theta$$

De donde θ , es el ángulo de la normal a la espira con el campo magnético (orientación de la espira respecto al campo magnético). Reemplazando en la derivada se tiene:

$$\varepsilon_{ind} = - \left[\frac{dB}{dt} + \frac{dS}{dt} - \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right]$$

Esta expresión muestra que se inducirá una fem en la espira si:

- El campo magnético varía con el tiempo.
- La forma de la espira o el área de la espira varía con el tiempo.
- La orientación de la espira respecto al campo magnético cambia con el tiempo.

De acuerdo con las razones dadas por las cuales se puede inducir la fem en la espira se tiene que la respuesta más acertada es **la opción a)**, dado que la forma y la orientación de la espira no cambian con el tiempo, sus correspondientes derivadas son cero.

4. La ley de inducción de Faraday establece: (Bauer & Westfall, 2011)

- a) Que en un bucle se induce una diferencia de potencial cuando hay un cambio de flujo magnético a través del bucle.
- b) Que la corriente inducida en un bucle por un campo magnético variable produce un campo magnético que se opone a este cambio del campo magnético.
- c) Que un campo magnético variable induce un campo eléctrico.
- d) Que una inductancia de un dispositivo es una medida de su oposición a cambios en corriente que circula a través del dispositivo.
- e) Que el flujo magnético es el producto del campo magnético medio y el área perpendicular a éste en el que penetra.

Solución: *La respuesta correcta en la opción a)*, pues es la definición de la ley de inducción de Faraday

5. Un anillo conductor se mueve de izquierda a derecha a través de un campo magnético uniforme, como muestra la figura 146. ¿En qué regiones hay una corriente inducida en el anillo? (Bauer & Westfall, 2011)

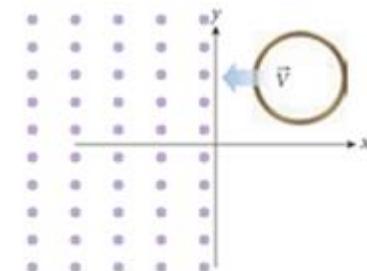


Figura 146.

- a) Regiones B y D.
- b) Regiones B, C y D.
- c) Región C.
- d) Regiones A a E.

Solución: Las únicas regiones en las cuales existe una variación del flujo a través del bucle son: B y D, pues en estas regiones el bucle está entrando o saliendo, respectivamente de la región donde hay campo magnético, por lo tanto, estaría variando el flujo magnético sobre este. De lo anterior **la respuesta correcta es la opción a).**

6. Un bucle circular de alambre que se mueve en el plano x-y con una velocidad constante en la dirección x negativa entra en un campo magnético uniforme, que cubre la región en la que $x < 0$, como ilustra la figura 147. El vector normal a la superficie del bucle apunta hacia la



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. Física; para ingenierías y ciencias con física moderna

Figura 147.

dirección del campo magnético. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta? (Bauer & Westfall, 2011)

- a) La diferencia de potencial inducida en el bucle está en un máximo cuando el borde del bucle apenas entra en la región con el campo magnético.
- b) La diferencia de potencial inducida en el bucle está en un máximo cuando un cuarto del bucle está en la región con el campo magnético.
- c) La diferencia de potencial inducida en el bucle está en un máximo cuando el bucle está a la mitad de la región con el campo magnético.
- d) La diferencia de potencial inducida en el bucle es constante desde el momento en el que éste comienza a entrar en la región con el campo magnético.

Solución: La fem inducida será máxima cuando el flujo de campo magnético a través del bucle sea máximo, esto ocurre cuando haya una mayor área entrando a la región del campo magnético. De acuerdo con lo expuesto y analizando las diferentes opciones, se tiene que **la respuesta correcta es la opción c)**, (la más acertada).

7. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre autoinducción es correcta? (Bauer & Westfall, 2011)

- a) La autoinducción ocurre sólo cuando una corriente directa fluye por el circuito.

- b) La autoinducción ocurre sólo cuando una corriente alterna fluye por el circuito.
- c) La autoinducción ocurre cuando por un circuito fluye una corriente directa o una corriente alterna.
- d) La autoinducción ocurre cuando por un circuito fluye una corriente directa o una corriente alterna, siempre y cuando la corriente varíe.

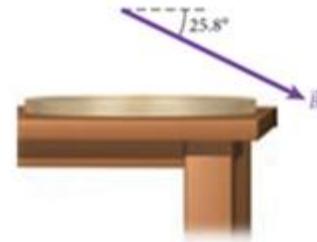
Solución: La autoinducción se presenta cuando a través de un circuito hay variación del flujo magnético debido a una “causa” propia del circuito. El flujo magnético puede variar porque el campo magnético debido a la corriente en el circuito varié, y este campo vario debido a que la corriente (que circula por el circuito) que lo produce varia, corriente que puede ser directa o alterna; por lo tanto, **la respuesta correcta es la opción d).**

8. Usted tiene una bombilla, una barra imantada, un carrete de alambre que puede cortar en tantas piezas como quiera, y nada más. ¿Cómo puede encender la bombilla? (Bauer & Westfall, 2011)

- a) No puede. Para encenderse, la bombilla necesita electricidad, no magnetismo.
- b) Puede cortar un trozo de alambre, conectar la bombilla a los dos extremos del alambre y pasar el imán por el bucle que se ha formado.
- c) Corte dos trozos de alambre y conecte el imán y la bombilla en serie.

Solución: La opción correcta es la opción b, puesto que este es el experimento típico para mostrar la inducción magnética.

9. Una bobina circular de alambre con 20 vueltas y radio de 40.0 cm está colocada en posición horizontal sobre una mesa, como muestra la figura 148. Sobre toda la mesa hay un campo magnético uniforme que se extiende con una magnitud de 5.00 T dirigido hacia el norte y hacia abajo, formando un ángulo de 25.8° con la horizontal. ¿Cuál es la magnitud del flujo magnético a través de la bobina? (Bauer & Westfall, 2011)



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. Física; para ingenierías y ciencias con física moderna

Figura 148.

Solución: El flujo magnético a través de cualquier superficie S está dado por:

$$\Phi_B = B \cdot S = Bs \cos \theta$$

Donde, θ es el ángulo entre la normal a la superficie sobre la que se quiere hallar el flujo y el campo magnético. En la figura 149, se observa que el vector normal a la superficie de las espiras y el campo magnético. Como se puede ver el ángulo que forman estos vectores es de $115,8^\circ$. Hay que aclarar que cada espira contribuye al flujo, por lo tanto, el flujo magnético a través de las espiras es:



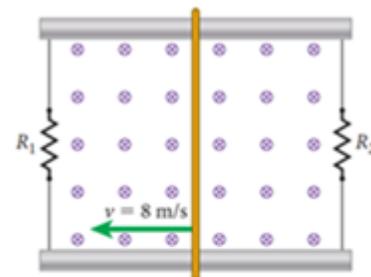
Figura 149.

$$\Phi_B = NBs \cos \theta$$

$$\Phi_B = 20 * 5 T * \pi * 0,4^2 m^2 \cos(115,8)$$

$$\Phi_B = -21,88 Tm^2$$

10. Una barra conductora de 50.0 cm de longitud se desliza sobre dos barras metálicas paralelas colocadas en un campo magnético de magnitud de 1 000. G, como se indica en la figura 150. Los extremos de las barras están conectados a dos resistores, $R_1 = 100. \Omega$ y R_2



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. Física; para ingenierías y ciencias con física moderna

Figura 150.

= 200. Ω . La barra conductora se mueve a velocidad constante de 8.00 m/s.
(Bauer & Westfall, 2011)

- a) ¿Cuáles son las corrientes que fluyen por los dos resistores?
- b) ¿Qué potencia se suministra a los resistores?
- c) ¿Qué fuerza se requiere para mantener el movimiento de la barra a velocidad constante?

Solución: La barra divide el circuito en dos partes, el lado derecho en cual el flujo de campo magnético está aumentando, por estar aumentando su área, y el lado izquierdo, lado en que el flujo está disminuyendo. De acuerdo con el gráfico, el flujo en un instante de tiempo cualquiera será:

$$\Phi_B = \Phi_D + \Phi_I$$

Donde los subíndices D e I, hace referencia a lado derecho y lado izquierdo respectivamente

El flujo de campo magnético sobre una de las secciones es

$$\Phi_B = B \cdot S = BS \cos \theta$$

Dado que el campo magnético entra a la página y la normal sale de esta se tiene que el ángulo entre la normal y el campo es de 180° , por lo tanto, se tiene que $\cos \theta = \cos 180 = -1$. El área S, para el cálculo del flujo es $S = lx$, entonces el flujo en un instante determinado será:

$$\Phi_B = -Blx$$

Por definición la fem inducida es dada por la ley de Faraday

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Reemplazando el flujo

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d(-Blx)}{dt}$$

Dado que la altura del circuito es igual a la longitud de la barra y esta es constante, al igual que el campo magnético, se tiene que

$$\varepsilon_{ind} = Bl \frac{dx}{dt}$$

La derivada es igual a la velocidad con que se mueve la barra, quedando entonces

$$\varepsilon_{ind} = Blv$$

Como consecuencia se va a inducir en las resistencias (aparece en el circuito una corriente inducida) una corriente. La ley de Ohm establece que

$$\varepsilon_{ind} = I_{ind}R$$

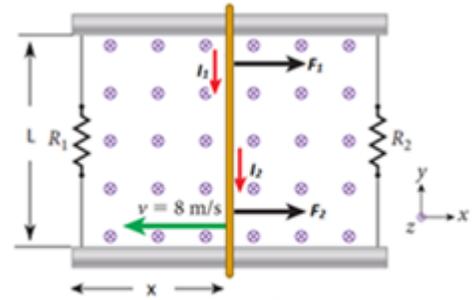
Por lo tanto, se tiene que:

$$I_{ind,1} = \frac{\varepsilon_{ind}}{R_1} = \frac{Blv}{R_1} = \frac{(0.1T)(0.5m)(8ms^{-1})}{100\Omega} = 4 \times 10^{-3} A$$

$$I_{ind,2} = \frac{Blv}{R_2} = \frac{(0.1T)(0.5m)(8ms^{-1})}{100\Omega} = 2 \times 10^{-3} A$$

La ley de Lenz nos da información sobre la dirección de estas corrientes. Esta establece que la dirección de la corriente inducida debe ser tal que esta cree un campo magnético que se oponga a la variación del flujo de campo magnético a través del circuito, dicho de otra manera, que el flujo de campo magnético tienda a permanecer constante.

En el lado izquierdo del circuito el área está disminuyendo, entonces el flujo está disminuyendo de ahí que se debe crear una corriente que a su vez induzca un campo magnético que contrarreste esta disminución, por lo tanto, siguiendo la ley de Ampere la corriente I_1 , sobre la barra debe ir hacia abajo, es decir, recorrer la malla izquierda en sentido



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. Física; para ingenierías y ciencias con física moderna

Figura 151.

horario. Para la malla derecha el flujo está aumentando pues su área aumenta lo que conlleva a que se cree una corriente que crea un campo que se oponga a este aumento, por lo tanto, la corriente inducida va a crear un campo que entre a la página en el lado derecho, de igual manera por ley de Ampere, la corriente I_2 sobre la barra va hacia arriba, es decir, recorre la malla derecha en sentido antihorario. Estas corrientes se ilustran en la figura 151.

La potencia disipada por una resistencia está dada por

$$P = I^2 R$$

La potencia total disipada en el circuito es:

$$P = P_1 + P_2$$

$$P = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = (0.004 \text{ A})^2 * 100 \Omega + (0.002 \text{ A})^2 * 200 \Omega = 0.0024 \text{ watts}$$

$$P = \left(\frac{Blv}{R_1}\right)^2 R_1 + \left(\frac{Blv}{R_2}\right)^2 R_2$$

En la anterior ecuación se han reemplazado las corrientes inducidas. Simplificando se tiene:

$$P = \frac{(Blv)^2}{R_1} + \frac{(Blv)^2}{R_2}$$

$$P = (Blv)^2 \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right]$$

Ahora bien, dado que esta varilla que transporta unas corrientes se mueve en un campo magnético esta va a experimentar unas fuerzas magnéticas. La fuerza magnética sobre un conductor que transporta una corriente está dada por:

$$\vec{F} = I(\vec{l} * \vec{B})$$

$$\vec{F} = I(l(-\hat{j}) * B(-\hat{k}))$$

El producto cruz da en dirección x, esto es

$$\vec{F} = IlB\hat{i}$$

Las fuerzas F_1 y F_2 , se ilustran en la figura. La fuerza neta sobre la barra es

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F} = lB(I_1 + I_2)\hat{i}$$

$$\vec{F} = lB\left(\frac{Blv}{R_1} + \frac{Blv}{R_2}\right)\hat{i}$$

$$\vec{F} = (lB)^2v\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\hat{i}$$

$$\vec{F} = (0.5m * 0.1T)^2 * 8ms^{-1}\left(\frac{1}{100\Omega} + \frac{1}{200\Omega}\right)\hat{i} = 0.0004 N$$

En todos los cálculos se ha utilizado $1G = 0.0001 T$.

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

Las ondas electromagnéticas son variaciones (oscilaciones) de los campos eléctricos y magnéticos (campos electromagnéticos) que viajan en el espacio libre (vacío) o a través de un medio material. De lo anterior se desprende que una de las diferencias entre las ondas mecánicas y las electromagnéticas es que, mientras que las primeras necesitan de un medio para propagarse las segundas no.

Todos los tipos de radiación electromagnética conocidos son ondas electromagnéticas (Ultravioleta, infrarrojo, luz, rayos x, rayos gamma, etc.). Es decir, todo el espectro electromagnético.

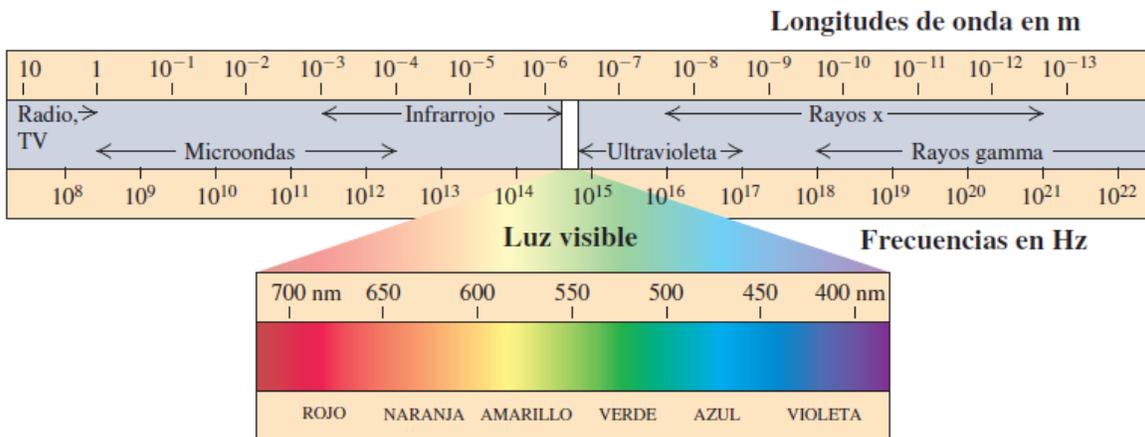


Figura 152. Espectro electromagnético. Figura tomada de (Young & Freedman, 2013)

Las ondas electromagnéticas fueron predichas de forma teórica por el físico británico James Clerk Maxwell (1831 – 1879) en 1865 y encontradas de manera experimental en 1887 por el físico alemán Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894). (Serway & Jewett, Jr., 2018)

La ecuación de onda electromagnética en términos del campo eléctrico está dada por

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

De donde $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ es la velocidad de propagación (velocidad de la luz), al sustituir los valores para

$$c = 2.99792 * 10^8 \text{ m/s}$$

Si tenemos en cuenta que $E = cB$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Las dos ecuaciones anteriores corresponden a la ecuación de una onda polarizada linealmente que se propaga en la dirección x .

La solución a estas dos ecuaciones diferenciales para la onda electromagnética que se ilustra en la figura en la siguiente esta dadas por

$$\vec{E}(x, t) = E_{max} \cos(kx - \omega t) (\hat{j})$$

$$\vec{B}(x, t) = B_{max} \cos(kx - \omega t) (\hat{k})$$

De donde k es el número de onda y ω es la frecuencia angular (estas dos constantes se definen igual que en las ondas mecánicas)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

$$\frac{w}{k} = \lambda f = c$$

Aquí λ y f , son la longitud de onda y la frecuencia respectivamente.

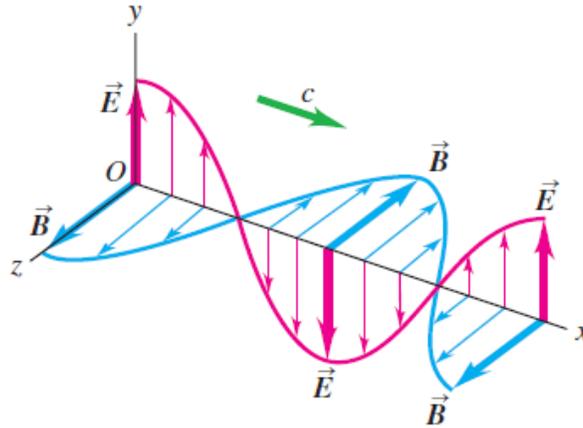


Figura 153. Onda electromagnética típica. Figura tomada (Young & Freedman, 2013)

En la figura 153, se ilustra se puede ver la representación de los campos eléctrico y magnético como funciones de x correspondientes a una onda electromagnética sinusoidal plana linealmente polarizada. Se muestra una longitud de onda de la onda en el tiempo $t = 0$. Los campos se indican solo para puntos a lo largo del eje x . (Young & Freedman, 2013)

Al igual que las ondas mecánicas las ondas electromagnéticas también transportan momentum y energía.

La energía transportada por una onda electromagnética está dada por el vector de Poynting \vec{S} , que en realidad lo que representa es la rapidez de flujo de energía, sus unidades son Watts sobre metro cuadrado (W/m^2) y viene dado por

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

La intensidad, I , de una onda electromagnética es el valor promedio en uno o varios ciclos del vector de Poynting, S_{prom} .

$$I = S_{prom} = \frac{E_{m\acute{a}x}B_{m\acute{a}x}}{2\mu_0} = \frac{E_{m\acute{a}x}^2}{2\mu_0c} = \frac{cB_{m\acute{a}x}^2}{2\mu_0}$$

Como sabemos si en determinada regi3n del espacio existe un campo el3ctrico o magn3tico entonces asociados a estos campos en dicha regi3n existe una densidad de energ3a. La densidad de energ3a asociada al campo el3ctrico est3 dada por

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0E^2$$

Y para el campo magn3tico

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

La densidad de energ3a instant3nea en aquella regi3n donde existe una onda electromagn3tica est3 dada por la suma de las densidades asociadas a los dos campos, esto es

$$u = u_E + u_B = 2u_E = 2u_B = \epsilon_0E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

Y la densidad de energ3a promedio es

$$u_{prom} = \epsilon_0(E^2)_{prom} = \frac{1}{2}\epsilon_0E_{max}^2 = \frac{1}{2\mu_0}B_{max}^2$$

$$I = S_{prom} = cu_{prom}$$

Como ya se menciona una onda electromagn3tica tambi3n transporta momentum, cuando cierta cantidad de movimiento es absorbida por una superficie sobre esta se ejerce cierta presi3n. La presi3n ejercida por una onda electromagn3tica se denomina *presi3n de radiaci3n*, P .

La presión de radiación ejercida sobre una superficie depende de si esta es perfectamente reflejante o perfectamente absorbente.

Para una superficie perfectamente absorbente se tiene

$$P = \frac{S}{c}$$

Y para una perfectamente reflejante

$$P = \frac{2S}{c}$$

Si la superficie no es ni perfectamente absorbente ni reflejante se tiene

$$P = (1 + f) \frac{S}{c}$$

En esta ecuación se tiene que f es la fracción de luz incidente que es reflejada por la superficie.

“Las ondas electromagnéticas transportan cantidad de movimiento lineal, así como energía. Cuando esta cantidad de movimiento es absorbida por alguna superficie, sobre ella se ejerce presión. En esta explicación el supuesto es que la onda electromagnética impacta en la superficie con una incidencia perpendicular y transmite a la superficie una energía total T_{RE} en un intervalo de tiempo Δt . Maxwell demostró que si la superficie absorbe toda la energía incidente T_{RE} en este intervalo de tiempo (como lo haría un cuerpo negro), la cantidad de movimiento total \vec{p} transportada a la superficie tiene una magnitud” (Serway & Jewett, Jr., 2018)

$$\mathbf{p} = \frac{T_{RE}}{c} \quad (\text{absorción completa})$$

“Si la superficie es un reflector perfecto (como un espejo) y la incidencia es normal a la superficie, entonces la cantidad de movimiento transportada a la superficie en un intervalo de tiempo Δt es dos veces la que se obtiene mediante la ecuación anterior. Es decir, la cantidad de movimiento transferida a la superficie por la luz incidente es $p = T_{RE}/c$, y la cantidad de movimiento transferida por la luz reflejada también es $p = T_{RE}/c$. Por lo tanto,

$$\mathbf{p} = \frac{2T_{RE}}{c} \quad (\text{reflexión completa})$$

PROBLEMAS RESUELTOS DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

1. Un láser neón-helio de 15.0 mW emite un haz de sección transversal circular con un diámetro de 2.00 mm. (a) Determine el campo eléctrico máximo en el haz. (b) ¿Cuál es la energía total contenida en una longitud de 1.00 m del haz? (c) Determine la cantidad de movimiento que tiene un tramo de 1.00 m de longitud del haz. (Serway & Jewett, Jr., 2018)

Solución: El valor dado de 15.0 mW es la potencia radiada por el láser, como sabemos la potencia (P) se define como intensidad (I) sobre área (A), esto es

$$I = \frac{P}{A}$$

Y la intensidad está relacionada con el vector de Poyting y este con el campo eléctrico máximo mediante la siguiente ecuación

$$I = S_{prom} = \frac{E_{máx}^2}{2\mu_0 c}$$

Igualando las dos ecuaciones se tiene

$$\frac{P}{A} = \frac{E_{máx}^2}{2\mu_0 c}$$

Despejando para $E_{máx}$ se tiene

$$E_{máx} = \sqrt{\frac{2P\mu_0 c}{A}}$$

De donde $A = \pi r^2$. Es de anotar que se trabajaran todas las unidades en sistema internacional, por lo tanto, para aquellas unidades que no estén en SI se realiza su conversión.

$$E_{máx} = \sqrt{\frac{2P\mu_0 c}{\pi r^2}} = \sqrt{\frac{2 * 15 * 10^{-3} W * 4\pi * 10^{-7} TmA^{-1} * 3 * 10^8 ms^{-1}}{\pi(1 * 10^{-3} m)^2}}$$

$$E_{m\acute{a}x} = 1.897 * 10^3 \frac{N}{C}$$

- b. Como se sabe en aquella regi3n del espacio donde exista un campo el3ctrico hay una anergia almacenada para nuestro caso lo que nos est3n solicitando es la energ3a contenida en un cilindro de longitud 1m y di3metro igual al haz del l3aser (2.00 mm). La densidad de energ3a (energ3a por unidad de volumen) contenida en un volumen determinado est3 dada por

$$u_{prom} = \frac{Energ\acute{a}}{volumen} = \epsilon_0(E^2)_{prom} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_{max}^2$$

Donde $volumen = \pi r^2$, entonces

$$Energ\acute{a} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_{max}^2 * \pi r^2$$

Reemplazando los valores dados se tiene

$$Energ\acute{a} = \frac{1}{2} * 8.854 * 10^{-12} * (1.897 * 10^3)^2 * \pi * (1 * 10^{-3})^2$$

$$\mathbf{Energ\acute{a} = 5,005 * 10^{-11}J}$$

- c. La cantidad de movimiento transportada por la onda electromagn3tica est3 dada por:

$$p = \frac{T_{RE}}{c} = \frac{energ\acute{a}}{c}$$

$$p = \frac{5,005 * 10^{-11}J}{3 * 10^8 m/s}$$

$$\mathbf{p = 1.67 * 10^{-19} \frac{kg \cdot m}{s}}$$

2. En determinada regi3n del espacio los campos el3ctrico y magn3tico de cierta onda electromagn3tica en un instante de tiempo est3n dados por $\vec{E} =$

$(120\hat{i} + 48\hat{j} - 96\hat{k})\text{N/C}$ y $\vec{B} = (0.300\hat{i} + 0.120\hat{j} + 0.435\hat{k})\mu\text{T}$. (a) Demuestre que estos campos son perpendiculares entre sí. (b) Para estos campos determine el vector de Poynting. (c) Calcule la cantidad de energía contenida en un metro cubico de este espacio (d) ¿Cual sería la fuerza con que esta onda electromagnética golpearía una superficie perfectamente reflectante de un metro cuadrado de área?

Solución: (a) Dos vectores son perpendiculares si el ángulo entre ellos es de 90° ($\pi/2$), por lo tanto, para verificar si los vectores campo magnético y eléctrico dados son perpendiculares se debe calcular el ángulo entre ellos. Una manera de calcular este ángulo es utilizar la definición del producto cruz entre dos vectores, esto es,

$$|\vec{E} \otimes \vec{B}| = |\vec{E}||\vec{B}|\text{Sen}\theta$$

$$\sin \theta = \frac{|\vec{E} \otimes \vec{B}|}{|\vec{E}||\vec{B}|}$$

Primero se calcularán los módulos de los vectores

$$|\vec{E}| = \sqrt{(120)^2 + (48)^2 + (-96)^2}$$

$$|\vec{E}| = 160.997\text{N/C}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{(0.300)^2 + (0.120)^2 + (0.435)^2}\mu\text{T}$$

$$|\vec{B}| = 0.542\mu\text{T}$$

Ahora se procederá a calcular el producto cruz entre los vectores

$$\vec{E} \otimes \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 120 & 48 & -96 \\ 0.300 * 10^{-6} & 0.120 * 10^{-6} & 0.435 * 10^{-6} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{E} \otimes \vec{B} &= (48 * 0.435 * 10^{-6} - 0.120 * 10^{-6} * (-96))\hat{i} \\ &\quad - (120 * 0.435 * 10^{-6} - 0.3 * 10^{-6} * (-96))\hat{j} \\ &\quad + (120 * 0.12 * 10^{-6} - 0.3 * 10^{-6} * 48)\hat{k}\end{aligned}$$

$$\vec{E} \otimes \vec{B} = (32.4\hat{i} - 81\hat{j} + 0\hat{k}) * 10^{-6}$$

$$|\vec{E} \otimes \vec{B}| = \left(\sqrt{(32.4)^2 + (-81)^2}\right) * 10^{-6}$$

$$|\vec{E} \otimes \vec{B}| = 87.24 * 10^{-6}$$

Ahora se procederá a calcular el ángulo

$$\sin \theta = \frac{|\vec{E} \otimes \vec{B}|}{|\vec{E}||\vec{B}|} = \frac{87.24 * 10^{-6}}{160.997 * 0.542\mu} = \frac{87.24 * 10^{-6}}{160.997 * 0.542 * 10^{-6}}$$

$$\sin \theta = 0.9998 \cong 1$$

Dado que el $\sin \theta = 1$ entonces se tiene que $\theta = \frac{\pi}{2}$, con lo que queda demostrado que el vector campo eléctrico y el vector campo magnético son perpendiculares entre sí.

b. Ahora se procederá a calcular el vector de Poynting \vec{S} , que por definición está dado por

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

De los cálculos anteriores tenemos que $\vec{E} \otimes \vec{B} = (32.4\hat{i} - 81\hat{j} + 0\hat{k}) * 10^{-6}$, entonces

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi * 10^{-7}} (32.4\hat{i} - 81\hat{j} + 0\hat{k}) * 10^{-6}$$

$$\vec{S} = (25.78\hat{i} - 64.46\hat{j}) \text{ W/m}^2$$

c. La densidad de energía se obtiene aplicando la siguiente ecuación

$$u_{prom} = \frac{\text{Energía}}{\text{volumen}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{max}^2$$

De donde E_{max}^2 es la magnitud al cuadrado del campo eléctrico, la cual ya se calculó arriba. El volumen que se utilizará es de 1 metro cubico

$$\text{Energía} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{max}^2 * \text{volumen}$$

$$\text{Energía} = \frac{1}{2} * 8.854 * 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} * (160.997 \text{ N/C})^2 * 1m^3$$

$$\text{Energía} = 1.147 * 10^{-7} \text{ J}$$

d. La presión de radiación sobre una superficie perfectamente reflectante está dada por

$$P = \frac{2S}{c}$$

Pero como sabemos $P = F/A$, entonces

$$F = \frac{2AS}{c}$$

De donde S es la magnitud del vector de Poynting. Este vector se calculó arriba

$$\vec{S} = (25.78\hat{i} - 64.46\hat{j}) \text{ W/m}^2$$

$$S = \sqrt{(25.78)^2 + (-64.46)^2}$$

$$S = 69.42 \text{ W/m}^2$$

Reemplazando en la expresión para la fuerza

$$F = \frac{2 * 1m^2 * 69.42 \text{ W/m}^2}{3 * 10^8 \text{ m/s}}$$

$$F = 4.63 * 10^{-7} N$$

3. (a) ¿Cuál es la presión de radiación debida a un foco de 120 W a una distancia de 10.0 cm del centro de la bombilla? (b) compare la intensidad a una distancia de 10.0 cm y 20.0 cm del centro de la bombilla. (c) si el bulbo que contiene el filamento tiene un radio de 3.0 cm determine la fuerza que este experimenta.

Solución: (a) La presión de radiación para una superficie perfectamente absorbente está dada por

$$P = \frac{S_{prom}}{c}$$

Pero $S_{prom} = I$, entonces

$$P = \frac{I}{c} = \frac{P_{poten}}{Ac}$$

$$P = \frac{120W}{4\pi(0.05m)^2 * 3 * 10^8 m/s} = 1.27 * 10^{-5} N/m^2$$

b. Dado que

$$I = \frac{P}{A}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{P}{A_1}}{\frac{P}{A_2}} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

Donde se ha reemplazado $A = \pi r^2$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{(0.2)^2}{(0.1)^2}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = 4$$

c. si se asume el bulbo como una esfera se tiene que

$$F = PA = P * 4\pi r^2$$

$$F = 4\pi * 1.27 * 10^{-5} N/m^2 * (0.03m)^2$$

$$F = 1.44 * 10^7 N$$

4. Campos de una bombilla eléctrica tipo led. Una bombilla tipo de 5 W se puede modelar en forma razonable como una esfera de 3.0 cm de diámetro. Es común que ilumine 400 lúmenes (los lúmenes son una medida de la cantidad total de luz visible de una lámpara o fuente de luz); el resto consiste sobre todo en radiación infrarroja invisible. a) ¿Cuál es la potencia de la luz visible en la superficie de la bombilla? b) ¿Cuáles son las amplitudes de los campos eléctrico y magnético en esta superficie, para una onda sinusoidal con esta intensidad?

Solución: Básicamente se tiene que los lúmenes son la cantidad de luz (visible) que una fuente luminosa es capaz de generar, es decir, es la cantidad de flujo (intensidad de energía que llega) luminoso en el rango de luz visible. Lo dicho se puede expresar en una ecuación

Potencia percibida en watios

$$= \text{Flujo luminico en lumenes o intensidad } (W/m^2) * \text{Area}$$

De acuerdo esto se tiene que la cantidad de energía que radia la bombilla en el rango de la luz visible es

$$Potencia percibida en watios = Intensidad * 4\pi r^2$$

Asumiendo una esfera.

$$\text{Potencia percibida en watios} = 400 * 4\pi(0.03)^2$$

$$\text{Potencia percibida} = 1.13 \text{ W}$$

Esta es la potencia radiada por la bombilla en el rango de la luz visible. El porcentaje de energía percibida versus energía de funcionamiento de la bombilla es

$$\frac{\text{Potencia percibida}}{\text{Potencia de la bombilla}} * 100 = \frac{1.13}{5} * 100 = 22.6\%$$

Este resultado muestra que básicamente hay una pérdida de energía del 77% en el infrarrojo

b. Por la definición de intensidad se tiene

$$I = S_{prom} = \frac{E_{m\acute{a}x}B_{m\acute{a}x}}{2\mu_0} = \frac{E_{m\acute{a}x}^2}{2\mu_0c} = \frac{cB_{m\acute{a}x}^2}{2\mu_0}$$

Despejando para $E_{m\acute{a}x}$ se tiene

$$E_{m\acute{a}x} = \sqrt{2I\mu_0c} = \sqrt{2 * 400 * 4\pi * 10^{-7} * 3 * 10^8} = 549.17 \text{ V/m}$$

$$B_{m\acute{a}x} = \frac{E_{m\acute{a}x}}{c} = \frac{549.17 \text{ V/m}}{3 * 10^8 \text{ m/s}} = 1.8 * 10^{-6} \text{ T} = 1.8\mu\text{T}$$

5. **Tratamiento de alta energía del cáncer.** Los científicos están trabajando en una nueva técnica para exterminar las células cancerosas atacándolas con pulsos de luz de ultra-alta energía (en el rango de 10^{12} W) que duran un tiempo extremadamente corto (unos cuantos nanosegundos). Estos pulsos cortos codifican el interior de una célula sin causar que estalle, como lo harían los pulsos largos. Se puede modelar una célula típica tal como un disco de $5.0 \mu\text{m}$ de diámetro, con una duración de pulso de 4.0 ns con una potencia media de $2.0 * 10^{12} \text{ W}$. Supondremos que la energía se distribuye de manera uniforme

sobre las caras de 100 células por cada pulso. a) ¿Cuánta energía se da a la célula durante este pulso? b) ¿Cuál es la intensidad (para W/m^2) sobre la célula? c) ¿Cuáles son los valores máximos de los campos eléctrico y magnético en el pulso? (YOUNG & FREEDMAN, 2013)

Solución: (a) por definición se tiene que la potencia es la energía por unidad de tiempo esto es:

$$Potencia = \frac{Energía}{\Delta t}$$

Entonces la energía absorbida por el tejido cancerígeno compuesto por las 100 células en el tiempo que dura un pulso es

$$Energía = Potencia * \Delta t = [2 * 10^{12}W] * [4 * 10^{-9}s] = \mathbf{8 * 10^3J}$$

Ahora bien, la cantidad de energía que absorbe una célula es el anterior valor dividido 100 dado que la radiación se distribuye de manera uniforme, lo que significa que cada célula absorbe la misma cantidad de energía es **80J**.

(b) la intensidad I , es la potencia dividida entre el área incidente. En nuestro caso el área sobre la cual incide la energía radiada es el área compuesta por las 100 células, el área de la célula en términos de su diámetro es $A = \frac{\pi\phi^2}{4}$, de donde ϕ , es el diámetro de la célula. Puesto que se tiene la potencia suministrada por la fuente y el diámetro de la célula entonces

$$I = \frac{P}{100A} = \frac{4P}{100\pi\phi^2} = \frac{4 * (2 * 10^{12}W)}{100\pi(5 * 10^{-6}m)^2} = \mathbf{1.01 * 10^{21} W/m^2}$$

(b) La intensidad (vector de Poyting) está relacionada con los campos magnéticos y eléctricos máximos que transporta la onda mediante la ecuación

$$I = S_{prom} = \frac{E_{máx}B_{máx}}{2\mu_0} = \frac{E_{máx}^2}{2\mu_0c} = \frac{cB_{máx}^2}{2\mu_0}$$

Despejando de aquí tenemos

$$E_{m\acute{a}x} = \sqrt{2I\mu_0c}$$

$$E_{m\acute{a}x} = \sqrt{2(1.01 * 10^{21})(4\pi * 10^{-7})(3 * 10^8)} = 8.73 * 10^{11} \text{ V/m}$$

$$B_{m\acute{a}x} = \frac{E_{m\acute{a}x}}{c} = \frac{8.73 * 10^{11} \text{ V/m}}{3 * 10^8 \text{ m/s}} = 2.91 * 10^3 \text{ T} = 2.91 \text{ kT}$$

6. Frank D. Drake, an investigator in the SETI (Search for Extra-Terrestrial Intelligence) program, once said that the large radio telescope in Arecibo, Puerto Rico (Figure 154), “can detect a signal which lays down on the entire surface of the earth a power of only one picowatt.”



Courtesy SRI International, USRA, UMET

Figure 154.

(a) What is the power that would be received by the Arecibo antenna for such a signal? The antenna diameter is 300 m. (b) What would be the power of an isotropic source at the center of our galaxy that could provide such a signal? The galactic center is $2.2 * 10^4$ ly away. A light-year is the distance light travels in one year. (Walker, Halliday, & Resnick, 2014)

Soluci3n: (a) El telescopio solo capta una peque1a fracci3n de la energa que llega toda la tierra que es de un pico watt ($1\text{pW} = 1 * 10^{-12}\text{W}$), por lo tanto, lo que se debe hacer encontrar a que fracci3n de superficie del telescopio comparada con la de la tierra y luego multiplicar esta fracci3n por la cantidad de energa que llega. Hay que tener en cuenta que la tierra es una esfera y que el telescopio se puede asumir como un disco.

$$\text{Fracci3n de \acute{a}rea} = \frac{\text{Area}_{\text{Telescopio}}}{\text{Area}_{\text{Tierra}}}$$

$$\text{Fracción de área} = \frac{\pi r_{\text{Telescopio}}^2}{4\pi r_{\text{Tierra}}^2}$$

De donde $r_{\text{Telescopio}} = 300\text{m}/2 = 150\text{m}$ y $r_{\text{Tierra}} = 6.4 \cdot 10^6\text{m}$.

$$\text{Fracción de área} = \frac{(150\text{m})^2}{4(6.4 \cdot 10^6)^2} = 1.37 \cdot 10^{-10}$$

Entonces la energía que recoge el telescopio es

$$P_{\text{Telescopio}} = 1 \cdot 10^{-12}\text{W} \cdot \text{Fracción de área} = (1 \cdot 10^{-12}\text{W}) \cdot (1.37 \cdot 10^{-10})$$

$$\mathbf{P_{\text{Telescopio}} = 1.37 \cdot 10^{-22}\text{W}}$$

Esta es una potencia extremadamente pequeña, hay mayor energía disipada por un grano de arroz que cae desde una altura de un metro. Este resultado nos indica la gran sensibilidad de los instrumentos de medida que se utilizan para recoger y seleccionar las energías provenientes del cosmos.

(b) para poder obtener la energía radiada por la fuente que se encuentra en el centro de nuestra galaxia a una distancia de $2.2 \cdot 10^4$ ly ($2.2 \cdot 10^4$ años luz), se debe pasar estos años luz a metros. Un año luz (ly) es la distancia que viaja la luz en un año moviéndose a una velocidad de $3 \cdot 10^8$ m/s.

$$2.2 \cdot 10^4 \text{ly} = \left[(2.2 \cdot 10^4 \text{año} - \text{luz}) \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \right] \cdot \frac{365 \text{días}}{1 \text{año}} \cdot \frac{24 \text{h}}{1 \text{días}} \cdot \frac{3600 \text{s}}{1 \text{h}}$$

$$\mathbf{2.2 \cdot 10^4 \text{ly} = 2.08 \cdot 10^{20} \text{m}}$$

La anterior es la distancia a la que se encuentra la tierra del centro de la galaxia, y la luz que proviene de la fuente que se encuentra ahí, tarda $2.2 \cdot 10^4$ años en llegar hasta nosotros.

La intensidad (Vector de Poyting) como ya se mencionó antes es la energía radiada por unidad de área, esto es

$$I = \frac{P}{A} = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Donde para el área se ha considerado una esfera, para la cual su centro coincide con el centro de la galaxia. Entonces

$$P_{Fuente} = 4\pi r^2 * I_{Tierra}$$

En este caso r será la distancia a la cual se encuentra la tierra del centro de la galaxia (ya calculado arriba). Aquí la intensidad en la captada por la tierra, esto es

$$I_{Tierra} = \frac{\text{Potencia que llega a la tierra}}{\text{Area de la tierra}} = \frac{1 * 10^{-12}W}{4\pi r_{Tierra}^2}$$

Reemplazando se tiene

$$P_{Fuente} = 4\pi r^2 * \frac{1 * 10^{-12}W}{4\pi r_{Tierra}^2} = 1 * 10^{-12}W * \left(\frac{r}{r_{Tierra}}\right)^2$$

$$P_{Fuente} = 1 * 10^{-12}W * \left(\frac{2.08 * 10^{20}m}{6.4 * 10^6m}\right)^2 = 1.06 * 10^{15}W$$

7. In Figure 155, a laser beam of power 4.60 W and diameter $D = 2.60$ mm is directed upward at one circular face (of diameter $d < 2.60$ mm) of a perfectly reflecting cylinder. The cylinder is levitated because the upward radiation force matches the downward gravitational force. If the cylinder's density is 1.20 g/cm³, what is its height H ? (Walker, Halliday, & Resnick, 2014)

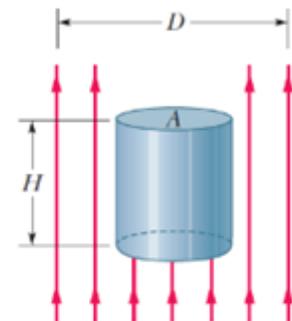


Figure 155.

Solución: Como ya se sabe cuándo una onda electromagnética (radiación) incide sobre una superficie se ejerce una presión de radiación sobre ella, esta presión depende de si la superficie es perfectamente absorbente o perfectamente reflectante, de otro lado por la definición de presión (fuerza distribuida sobre un área) se tiene que la radiación le ejerce al cilindro una fuerza hacia arriba, lo cual significa que sobre el cilindro actúan dos fuerzas, una debido a la radiación y la otra su propio peso, tal como se ilustra en la figura 156, al aplicar la segunda ley de Newton al cilindro teniendo en cuenta que este se encuentra en equilibrio se tiene

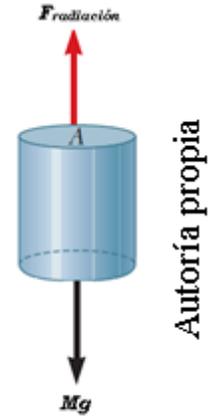


Figura 156.

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{radiación} - Mg = 0 \Rightarrow F_{radiación} = Mg$$

La presión de radiación para una superficie perfectamente reflectante como la del cilindro está dada por

$$P = \frac{2 * S_{prom}}{c}$$

Aquí S_{prom} es el vector de Poyting o la intensidad del láser (potencia dividida por el área del láser), esto es

$$P = \frac{2 * Potencia}{A * c} = \frac{2 * Potencia}{\pi r_{laser}^2 * c}$$

Igualando la anterior expresión con la definición normal de presión, teniendo en cuenta que el área donde incide la radiación es la del cilindro se tiene

$$\frac{F_{radiación}}{A_{cilindro}} = \frac{2 * Potencia}{\pi r_{laser}^2 * c} * A_{cilindro} = \frac{2 * Potencia}{\pi r_{laser}^2 * c} * \pi r_{cilindro}^2$$

$$F_{radiacion} = \frac{2 * Potencia}{c} \left(\frac{r_{cilindro}}{r_{laser}} \right)^2$$

Reemplazando en la ecuación para la condición de equilibrio del cilindro se tiene

$$\frac{2 * Potencia}{c} \left(\frac{r_{cilindro}}{r_{laser}} \right)^2 = Mg$$

La masa del cilindro esta relacionada con su densidad, ρ , por medio de la ecuación

$$M = \rho V_{cilindro} = \rho * \pi r_{cilindro}^2 H$$

Reemplazando en la ecuación de arriba se tiene

$$\frac{2 * Potencia}{c} \left(\frac{r_{cilindro}}{r_{laser}} \right)^2 = \rho * \pi r_{cilindro}^2 H * g$$

Despejando para H se tiene

$$\frac{2 * Potencia}{\pi \rho g c} \left(\frac{1}{r_{laser}} \right)^2 = H$$

Reemplazando los valores dados, teniendo cuidado de utilizar unidades del sistema internacional

$$H = \frac{2 * 4.60 \text{ W}}{\pi (1.20 * 10^3 \text{ kg/m}^2) * (9.8 \text{ m/s}^2) * (3 * 10^8 \text{ m/s})} \left(\frac{1}{1.30 * 10^{-3} \text{ m}} \right)^2$$

$$H = 4.91 * 10^{-7} \text{ m}$$

Referencias

- Walker, J., Halliday, D., & Resnick, R. (2014). *Fundamentals of physics*. Rosewood Drive: Wiley.
- Walker, J., Halliday, D., & Resnick, R. (2014). *Fundamentals of physics*. Wiley.
- Weber, H. J., & Arfken, G. B. (2003). *Essential Mathematical Methods for Physicists*. Orlando: Academic Press.
- Bauer, W., & Westfall, G. D. (2011). *Física para ingenierías y ciencias*. México, D.F.: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
- Doria Andrade, J. G., & Rivera Berrío, J. G. (2018). *Proyectodescartes.org*. Obtenido de https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/Fisica_II/imagenes/76.png
- Fernández, J. L., & Coronado, G. (Abril de 2013). *FISICALAB*. Obtenido de <https://www.fisicalab.com/apartado/frente-de-onda>
- GIANCOLI, C., D. (2009). *FÍSICA 1. Principios con aplicaciones. Sexta edición*. México: PEARSON EDUCACIÓN.
- Giancoli, D. (2008). *física para ciencias e ingeniería con física moderna*. Mexico: Pearson Prentice Hall.
- GIANCOLI, D. C. (2009). *FÍSICA 2. Principios con aplicaciones. Sexta edición*. México: PEARSON.
- KREYSZIG, E. (2011). *ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS*. Nueva Jersey: JOHN WILEY & SONS, INC.
- Pérez León, E. (16 de NOVIEMBRE de 2016). *PAIDEIAEDUCATION*. Obtenido de <http://paideiaeducation.blogspot.com/2016/11/quien-tiene-la-razon-murcielago-o.html>
- Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2007). *Cálculo*. México D.F: PEARSON EDUCACIÓN.
- Raimond A. Serway - John W. Jewett, J. (2009). *Física para ciencias e ingenierías con Física moderna*. Mexico: Cengage Learning.
- Serway, R. A., & Jewett, Jr, J. W. (2008). *Física para ciencias e ingeniería*. Mexico, D.F.: Cengage Learning Editores,.
- Serway, R. A., & Jewett, Jr., J. W. (2018). *Física para ciencias e ingeniería*. Mexico: CENGAGE.
- Serway, R. A., & Jewett, jr, J. W. (2019). *Física para ciencias e ingenirias (Vol. 1)*. Ciudad de México: CENGAGE.
- Serway, R. A., & Jewett, Jr., J. W. (2019). *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*. Boston: Cengage Learning Editores, S. A.
- Tipler, P. A., & Mosca, G. (2010). *Física para la ciencia y la tecnología. Electricidad y magnetismo/Lu*. Barelona: REVERTÉ.
- Westfall, w. B. (2011). *Física para ingeniería y ciencias con física moderna*. Mexico: Mc Graw Hill.
- Wolfgang, B. ..., & Westfall, G. (2011). *Física para ingeniería y ciencias*. Mexico: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES.

- YOUNG, H. D., & FREEDMAN, R. A. (2009). *Física universitaria*. Mexico, D.F.: PEARSON EDUCACIÓN.
- Young, H. D., & Freedman, R. A. (2013). *Física universitaria con física moderna volumen 2*. México: PEARSON.
- YOUNG, H. D., & FREEDMAN, R. A. (2013). *Física universitaria con física moderna volumen 2*. México: PEARSON.
- YOUNG, H. D., & FREEDMAN, R. A. (2013). *Física universitaria volumen 1. 13ª edición (Vol. 1)*. México: PEARSON.
- YOUNG,, H. D., & FREEDMAN, R. A. (2014). *Sears and Zemansky's University Physics University Physics Technology Update*, (13 ed., Vol. 2). Edinburgh Gate, England: PEARSON.