CARTILLA DE FÍSICA III - VOL. I

Problemas resueltos de electricidad y magnetismo.

CARTILLA DE FÍSICA III – VOL. I

Problemas resueltos de electricidad y magnetismo

Jorge Eliecer Murillo Ballesteros

25 DE MAYO DE 2021
ESCUELA MILITAR DE AVIACIÓN MARCO FIDEL SUÁREZ
www.emavi.du.co

Es posible volar sin motores, pero no sin conocimiento y habilidad. Considero que esto es algo afortunado, para el hombre, por causa de su mayor intelecto, ya que es más razonable la esperanza de igualar a los pájaros en conocimiento, que igualar a la naturaleza en la perfección de su maquinaria

Wilburg Wright

Presentación

El presente material tiene como fin servir de apoyo a los cadetes de la Escuela Militar de Aviación Marco Fidel Suarez en la asignatura de Física 3. Es un repositorio de problemas resueltos, (con una breve presentación de la teoría de los temas tratados en el curso, que en ningún momento pretende sustituir el texto guía) que van a ampliar la gama de problemas solucionados por el docente en la asignatura. Espero que cumpla con el fin propuesto, cualquier duda o inquietud por favor manifestarla, pues esta es una primera versión que necesita ser revisada

Jorge Eliécer Murillo Ballesteros

Docente de Física

Índice

El Campo eléctrico	1
Problemas resueltos de aplicación ley de Coulomb	8
Problemas resueltos de campo eléctrico	23
Ley de Gauss	49
Problemas resueltos de ley de Gauss	53
El potencial eléctrico	69
Problemas resueltos de potencial eléctrico	73
Capacitancia	118
Problemas resueltos de capacitancia	124
Corriente y resistencia	137
Problemas resueltos de corriente y resistencia	142
Magnetismo	159
Problemas resueltos de magnetismo	164
Ley de Ampere	179
Problemas resueltos de ley de Ampere	184
Inducción magnética	196
Problemas resueltos de inducción magnética	201
Ondas electromagnéticas	213
Problemas resueltos de ondas electromagnéticas	219
Referencias	233

EL CAMPO ELÉCTRICO

Alguna vez nos hemos preguntado: ¿porque al peinarnos algunos cabellos se nos "paran" o son atraídos por el peine?, ¿por qué en un día frio al arrimarnos a un estante metálico sentimos una descarga?, ¿Cómo funciona una fotocopiadora? Todos estos fenómenos y muchos otros se explican proponiendo la existencia de la carga eléctrica y además tienen en común que estas cargas se encuentran quietas, es decir, en reposo. La explicación a estos fenómenos lo da una rama de la física llamada *Electrostática.*

La electrostática es la rama de la física que estudia aquellos fenómenos en los que intervienen cargas eléctricas estáticas o en reposo (Bauer & Westfall, 2011).

La carga eléctrica es una propiedad de la materia al igual que la masa; existen dos tipos o clases de carga eléctrica las positivas y las negativas. El carácter positivo y/o negativo de una carga eléctrica es solo cuestión de convención o nombre; lo que se quiere decir con esto es que el Universo no se alteraría si cambiásemos los signos de las cargas existentes, esto es, positivo por negativo y viceversa (esto se conoce como conjugación de la carga). A los electrones se le ha asignado una carga negativa mientras que a los protones una carga negativa.

Se ha encontrado que en todo proceso que en todo proceso físico la cantidad de carga presente se mantiene constante. Postulado que se conoce como "Ley de la conservación de la carga" (Giancoli, 2008). Esta es una de las cuatro leyes de conservación encontradas hasta la fecha; las otras tres son: Ley de la conservación del momentum lineal, Ley de la conservación del momentum angular, Ley de la conservación de la energía.

Se ha encontrado que existe un valor mínimo de carga; es decir, un cuerpo cargado jamás tendrá un valor de carga por debajo de esta carga mínima. A este valor mínimo de carga se le conoce como carga elemental o quantum de carga,

este valor de carga elemental es la cantidad de carga que posee un electrón (negativa) o un protón (positiva).

Todos los objetos en su estado "natural" poseen una carga neta cero, lo que se quiere decir con esto es que tiene igual cantidad de protones como de electrones. Cuando se dice que un objeto está cargado lo que esto significa es que el cuerpo posee un exceso de electrones (cuando el cuerpo está cargado negativamente), o un exceso de protones (cargado positivamente).

Existen tres maneras de cargar un cuerpo; por fricción, por inducción y por contacto. *Fricción*, es cuando por medio de frotamiento entre dos cuerpos inicialmente neutros uno queda cargado positivamente y el otro con carga negativa, lo que en realidad ha sucedido es que el cuerpo con carga negativa le "arranco" electrones al cuerpo que quedo cargado positivamente. *Contacto*, en este caso se parte de un objeto que inicialmente está cargado y este se pone en contacto con el cuerpo que se quiere cargar (un conductor). *Inducción*, igual que en caso de carga por contacto se parte con un cuerpo inicialmente cargado (inductor), este se acerca al cuerpo que se quiere cargar (metal), con carga neta cero; al hacer esto figura 1(b) el cuerpo se polariza (desplazamiento de cargas). Una vez polarizado se conecta uno de los lados a tierra por medio de un alambre muy fino; si se conectó el lado donde hay un exceso de carga negativa esta carga negativa (electrones) desciende a tierra por medio del alambre figura 1(c), una vez pase esto se corta el alambre y se retira el inductor; las cargas en el conductor se reacomodan quedando cargado positivamente figura 1(e). Si el lado que se conecta a tierra es el lado donde hay un exceso de carga positiva entonces suben desde tierra al conductor electrones, quedando este finalmente cargado negativamente.

De lo anterior se puede ver que la carga que se quita o se transfiere es casi siempre la negativa (electrones).

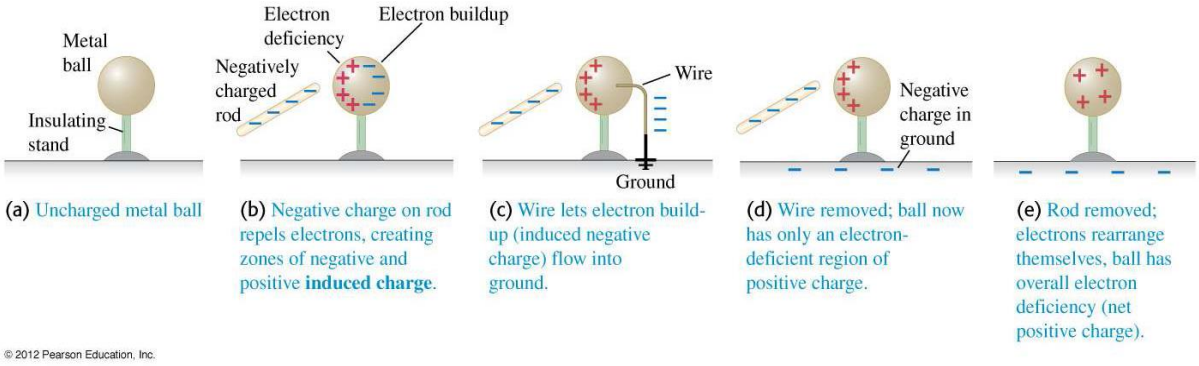


Figura 1. Cargando un cuerpo por el método de inducción. Tomada de (Young & Freedman, 2013)

LEY DE COULOMB.

Se ha observado que cuando cuerpos cargados interactúan cada uno de ellos experimenta una fuerza, esta fuerza que es debido solo a sus cargas, se denomina *fuerza eléctrica* (Bauer & Westfall, 2011). Además, también se tiene que cuerpos cargados de la misma manera (positivos o negativos) experimentan una fuerza de repulsión que trata de alejarlos a unos de otros, mientras que si se tienen dos cuerpos cargados de diferente manera (uno positivo y otro negativo); ellos experimentan una fuerza que trata de acercarlos entre sí. La fuerza con la que se atraen o se repelen dos objetos cargados fue establecida por Charles Agustín de Coulomb (1736 – 1806), quien estableció la ley que lleva su nombre; la cual dice: *La fuerza de atracción o de repulsión entre dos partículas cargadas es directamente proporcional a la cantidad de carga que poseen e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa sus centros, y apunta en la dirección de la línea que une los centros de estas* (YOUNG & FREEDMAN, 2009). Lo anterior se puede expresar matemáticamente como:

$$\vec{F}_{21} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\hat{r}$$

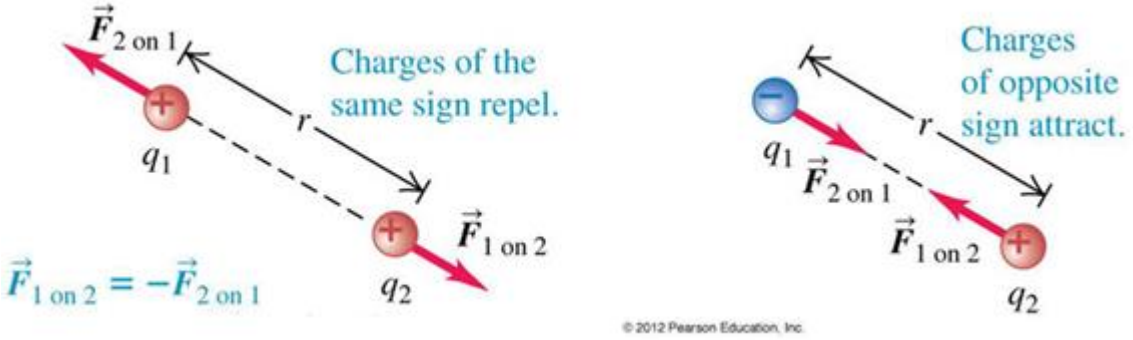


Figura 2. Interacción entre partículas cargadas. Tomada de (YOUNG, & FREEDMAN, 2014)

Dado que los protones residen en el núcleo atómico y estos poseen carga positiva; de acuerdo con la ley de Coulomb deberían repelerse, y por lo tanto el núcleo atómico colapsar. La pregunta que surge entonces es: ¿Qué es lo que hace que los protones permanezcan en el núcleo? Los físicos respondieron a esta pregunta postulando la existencia de una fuerza que solo actúa a nivel del núcleo atómico, y que es mucho más fuerte que la repulsión electrostática entre los protones; *La fuerza nuclear fuerte.* Que es una de las "cuatro" fuerzas fundamentales, las otras tres son: *Fuerza electromagnética (une la eléctrica y la magnética)*, *Fuerza gravitacional* y *la fuerza nuclear débil.* Aunque recientemente se plantea que solo existen tres fuerzas fundamentales, pues unifican la débil y la electromagnética en una sola llamada, *la electrodébil.*

Una vez definida la unidad de carga eléctrica queda entonces establecido el valor de la carga elemental (valor mínimo de carga que puede tener un cuerpo, que es la cantidad de carga que posee un electrón o un protón), este valor de carga mínima es:

$$e = 1.602\,176\,53(14) \times 10^{-19}\text{C}$$

Se sabe que cuando colocamos una carga q_0, en las inmediaciones de una carga Q; esta va a experimentar una fuerza, dependiendo de dónde (posición) se coloque q_0 así mismo va a ser la fuerza que ella experimente (magnitud y dirección). En la figura 3, se representa esta fuerza para diferentes posiciones de q_0, donde la longitud de la flecha está en proporción a la intensidad de la fuerza.

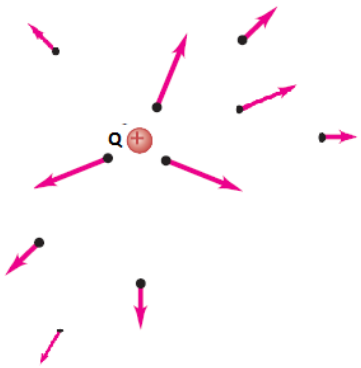


Figura 3. (Autoría propia)

Si Q no estuviese presente entonces q_0 no experimentaría fuerza alguna, lo cual quiere decir que de alguna manera Q modifica el espacio que la rodea y que esta modificación es "sentida" por q_0. La manera o forma como q_0, "siente" esta modificación es mediante la fuerza; fuerza, cuya intensidad y dirección depende de la ubicación de q_0, respecto de Q. De lo anterior se puede decir que a cada punto del espacio donde se ubique q_0 respecto a Q le podremos asignar un vector fuerza, a este "espacio lleno de fuerzas" común o normalmente se le llama campo de fuerzas, o más específicamente un *campo vectorial de fuerzas*. Por lo tanto, podemos decir ahora que las cargas tienen la "capacidad" de modificar el espacio, y, a esa modificación del espacio debido a las cargas le llamaremos *Campo eléctrico* (Giancoli, 2008). De tal manera que otra carga que esté presente experimentará esta modificación por medio de una fuerza.

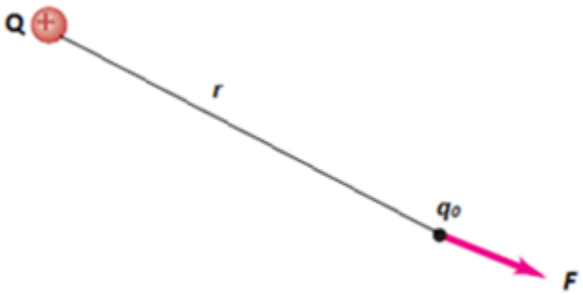


Figura 4. autoría propia

A manera de conclusión se puede decir que existen algunas entidades físicas que tienen la propiedad de modificar el espacio; y a esa modificación del espacio se le conoce como *campo*; de tal manera que otra entidad física de la misma naturaleza experimentará dicha deformación por medio de una fuerza.

Ahora bien, lo anterior en cuanto a la parte cualitativa, pero necesitamos saber cuan deformado está el espacio en un punto determinado debido a la carga eléctrica, es decir, necesitamos ahora cuantificar el *campo eléctrico*. Dado que el campo eléctrico se manifiesta como una fuerza sobre las cargas que están en él, entonces podemos utilizar este hecho para ello. Entonces se dirá que la *intensidad del Campo eléctrico E* a una distancia *r*, debido a una carga Q es la fuerza por unidad de "carga de prueba" que experimenta dicho campo

$$\vec{E} = \vec{F}/q_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

Lo anterior dado que la fuerza que experimenta q_0, es:

$$\vec{F} = Qq_0/r^2\,\hat{r}$$

Una manera más formal de escribir o presentar la ley de Coulomb respecto de cualquier punto de referencia se ilustra en la figura 5. En esta figura se muestran dos cargas referenciadas respecto de un punto de referencia (sistema de referencia) *O*,

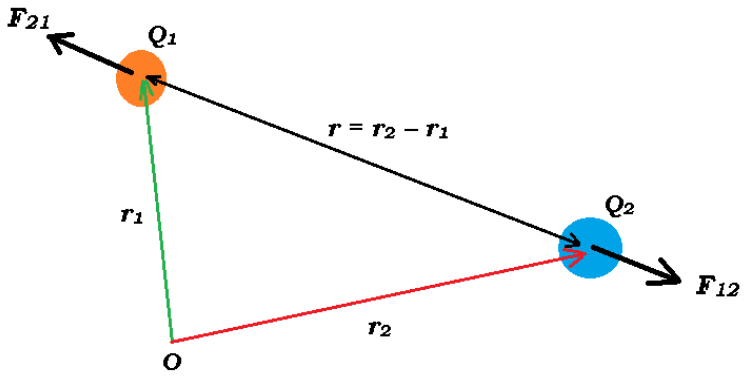


Figura 5. Fuerza entre cargas. Autoría propia

Y se escribe en forma de ecuación como

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = k_e \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}$$

De dónde,

$\vec{F}_{12}$: Es la fuera que ejerce la carga 1 sobre la 2

$\vec{F}_{21}$: Es la fuera que ejerce la carga 2 sobre la 1

$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$: es el radio vector que posiciona la carga 1 respecto e la 2

$k_e = 8.854 * 10^9 \ {}^{Nm^2}/_{C^2}$: constante de proporcionalidad (constante eléctrica)

$\boldsymbol{r_1}$: Vector posición de la carga 1

$\boldsymbol{r_2}$: Vector posición de la carga 2

$\hat{\boldsymbol{r}}$**:** Vector unitario en la dirección de la línea que une los centros de Q_1 y Q_2.

PROBLEMAS RESUELTOS DE APLICACIÓN LEY DE COULOMB

1. Dos pequeñas cuentas idénticas con carga $+Q$ se encuentran fijas, ubicadas sobre el eje x en $x = -d$ y $x = +d$, respectivamente. Una tercera cuenta de masa m y carga $+q$ se encuentra en equilibrio en el origen de coordenadas y es libre de moverse sobre el eje x. (a)Demuestre que si $+q$ se desplaza una pequeña distancia x experimentará un MAS (b) determine el periodo de oscilación (c) ¿Qué sucedería si se cambia $+q$ por $-q$?

Solución. Cuando $+q$ se desplaza bien sea hacia la izquierda del origen de coordenadas se rompe el equilibrio, por lo tanto, experimentará una fuerza neta. Las fuerzas que actúan sobre $+q$ se ilustran en la figura 6. Hay notar que si la partícula se desplaza hacia la derecha la fuerza neta ira hacia la izquierda puesto está más cerca de *2* que de *1*. Y si se desplaza hacia la izquierda ocurre lo contrario, por lo que se puede concluir que la cuenta oscilara pues la fuerza neta va en dirección opuesta al desplazamiento. Por lo dicho anteriormente se tiene que el movimiento de $+q$ es oscilatorio, ahora solo nos queda mostrar que oscila con MAS, para ello aplicaremos la segunda ley de Newton

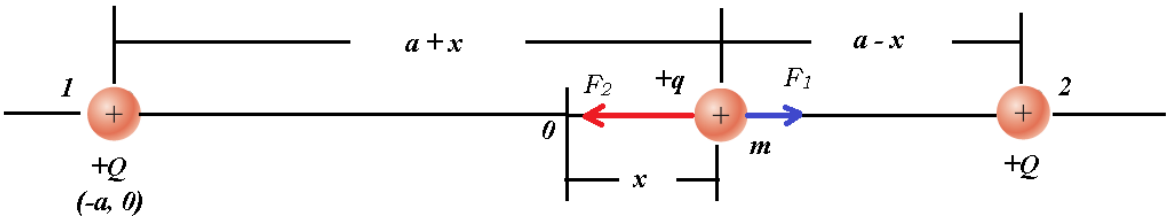


Figura 6. Autoría propia

$$\sum F_x = ma$$

$$F_1 - F_2 = -ma$$

Las fuerzas F_1 y F_2 son las fuerzas eléctricas que le hacen *1* y *2* a $+q$.

$$k\frac{Qq}{(x+d)^2} - k\frac{Qq}{(x-d)^2} = ma$$

Factorizando se tiene

$$kQq\left[\frac{1}{(x+d)^2}-\frac{1}{(x-d)^2}\right]=ma$$

Realizando la suma de fracciones y resolviendo los binomios se tiene

$$kQq\left[\frac{x^2-2xd+d^2-x^2-2dx-d^2}{(x^2-d^2)^2}\right]=ma$$

Sumando términos semejantes

$$kQq\left[\frac{-4xd}{(x^2-d^2)^2}\right]=ma$$

Dado que $x \ll d$, entonces se tiene que $(x^2-d^2)^2 \approx d^4$, de donde se ha despreciado x respecto de a, por lo tanto, se tiene

$$ma=-\frac{kqQ}{d^3}x$$

Despejando la aceleración se tiene

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\left(\frac{kQq}{md^3}\right)x$$

En la anterior expresión el término que esta en el paréntesis es constante, por lo que esta ecuación se puede escribir como

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=-w^2x$$

La anterior ecuación, es la ecuación característica el MAS. Es decir, se dice que un cuerpo oscila con movimiento armónico simple (MAS) si la aceleración es directamente proporcional a menos el desplazamiento, por lo tanto, queda demostrado que si la carga $+q$ es desplazada una pequeña distancia x de su posición de equilibrio oscilara con MAS. En la anterior ecuación se tiene que

$w^2 = \frac{kQq}{md^3}$ y w se interpreta como la frecuencia angular de las oscilaciones (se deja como ejercicio comprobar que tiene unidades de frecuencia)

$$w = \frac{2\pi}{T} = \sqrt[2]{\frac{kQq}{md^3}}$$

De donde T es el periodo de oscilación

$$\boldsymbol{T = 2\pi \sqrt[2]{\frac{md^3}{kQq}}}$$

Ahora bien, si la carga $+q$ se cambia por una carga negativa el resultado sigue siendo el mismo, es decir, la carga negativa también oscilara, pues lo único que sucederá respecto al caso anterior es que la dirección de las fuerzas se invierta.

2. Un bloque metálico de masa M y carga Q esta recubierto por una fina capa de plástico. El bloque se encuentra atado a un resorte de constante elástica k, el sistema bloque-resorte descansa sobre una superficie horizontal sin fricción (ver figura 7). Un detector de campo eléctrico se encuentra ubicado en un punto P a una distancia d del punto de equilibrio. Determine el valor del campo eléctrico que medirá el detector cuando el resorte es separado una distancia A de su posición de equilibrio y liberado.

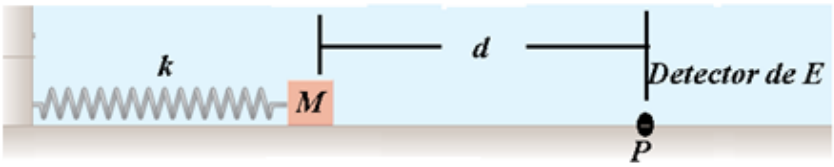


Figura 7. Autoría propia

Solución: Como es bien sabido cuando un objeto se ata a un resorte y luego se separa de su posición de equilibrio y se libera, este oscilará en un MAS y la posición en función del tiempo en cualquier instante respecto al punto de equilibrio está dada por

$$x(t) = ASen(wt + \varphi)$$

De donde $w = \sqrt{k/m}$, y φ es la fase inicial.

Si la distancia a la que se encuentra el bloque del detector es mucho más grande que las dimensiones del bloque entonces se puede tomar el bloque como una partícula. El campo eléctrico debido a una partícula cargada a una distancia r de esta de acuerdo con la ley de Coulomb esta dado por

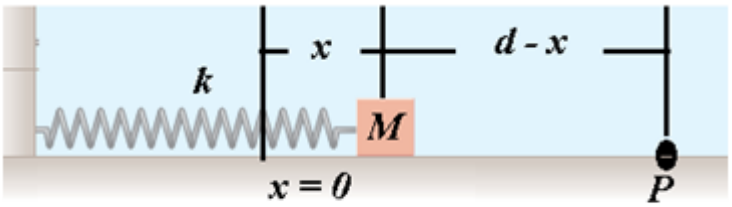


Figura 8. Autoría propia

$$\vec{E} = k\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

Para nuestro caso la posición del bloque respecto al detector está cambiando continuamente unas veces estará más cerca y otras más alejado, esto debido a la oscilación de la fuente del campo (el bloque).

La distancia del bloque al punto donde se encuentra el detector es

$$r = d \pm x(t) = d \pm ASen(wt)$$

Donde por conveniencia se ha tomado la fase inicial como cero, reemplazando en la expresión para el campo se tiene

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{k}\frac{\boldsymbol{Q}}{(\boldsymbol{d} \pm \boldsymbol{ASen}(\boldsymbol{wt}))^2}\,\hat{\boldsymbol{\imath}}$$

3. Dos pequeñas esferas metálicas se encuentran unidas a los extremos de un resorte aislante de longitud sin estirar ℓ_0 y constante elástica k, figura 9. (a) Ahora a las esferas se les depositan cargas $+Q_1$ y $-Q_2$ respectivamente, ¿cuándo el sistema llega al equilibrio cuanto se ha deformado el resorte? (b) El sistema compuesto por las cargas se coloca en una región donde existe un campo

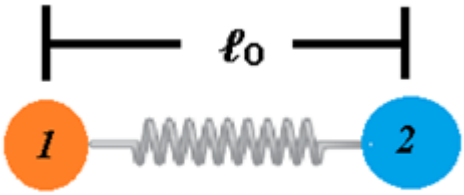


Figura 9. Autoría propia

uniforme $\vec{E} = E_0(-\hat{\imath})$ ¿El resorte se estira o se comprime respecto a la anterior situación? (c) Determine la nueva separación de las cargas cuando el sistema se encuentra en equilibrio (d) ¿Cuál debería ser el valor del campo eléctrico para que el resorte regresara a su longitud inicial ℓ_0?

Respuesta: (a) Debido a que las esferas tienen cargas opuestas estas se van a atraer haciendo que el resorte se contraiga, es decir, ahora las esferas estarán más cerca. Si llamamos ℓ_f a la separación de las esferas entonces la distancia de acortamiento es

$$x = \ell_0 - \ell_f$$

En figura 10, se ilustra la situación final donde se muestran las fuerzas que actúan sobre cada esfera

Figura 10. Autoría propia

En la figura se tiene que $F_{1-2} = -F_{2-1}$son las fuerzas eléctricas de interacción. Por Coulomb se tiene que

$$F_{1-2} = k_e \frac{Q_1 Q_2}{\ell_f^2}$$

Puesto que el sistema esta encuentra en equilibrio se debe cumplir para cualquiera de las dos partículas

$$\sum F_x = 0$$

Para la partícula 1 se tiene

$$F_{2-1} - kx = 0$$

Reemplazando $F_{1\text{-}2}$

$$k_e \frac{Q_1 Q_2}{\ell_f^2} - kx = 0$$

$$\boldsymbol{k_e \frac{Q_1 Q_2}{(\ell_0 - x)^2} - kx = 0}$$

Solucionar esta ecuación para $\boldsymbol{x}$ puede resultar un poco complicado, en lugar de intentarlo lo que haremos es suponer que $\ell_0 \gg x$. Al suponer esto podemos despreciar $\boldsymbol{x}$ en el denominador frente a ℓ_0, con lo cual se obtiene

$$k_e \frac{Q_1 Q_2}{\ell_0^2} - kx = 0$$

Despejando para $\boldsymbol{x}$ se obtiene

$$\boldsymbol{\frac{Q_1 Q_2}{k * k_e \ell_0^2} = x}$$

(b) y (c) Cuando el sistema se sumerge en un campo eléctrico, este campo ejerce una fuerza sobre cada una de las cargas. La fuerza que experimenta una carga eléctrica sumergida en un campo está dada por

$$\vec{F}_e = Q\vec{E}$$

De esta ecuación se puede concluir que las cargas positivas experimentaran una fuerza en dirección del campo mientras que las negativas en dirección opuesta. Dicho lo anterior se tiene que ahora las cargas van a experimentar la acción del campo lo que se ilustra en el grafico

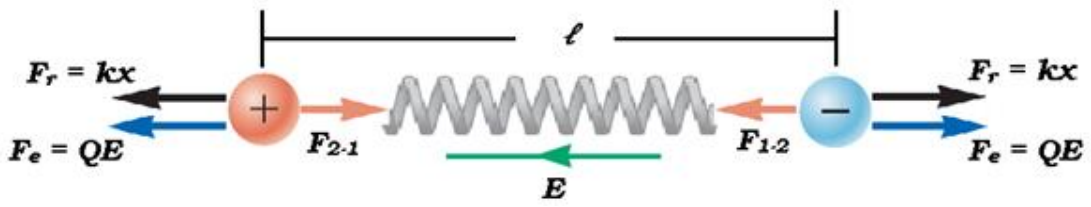


Figura 11. Autoría propia

La fuerza que ejerce el campo sobre las cargas tiende a separar las cargas, cuando no estaba presente el campo el resorte estaba contraído debido a la atracción entre las cargas. Dado que el sistema está en equilibrio

$$\sum F_x = 0$$

$$kx + F_e - F_{1-2} = 0$$

$$kx - k_e \frac{Q_1 Q_2}{\ell^2} + Q_1 E = 0$$

De donde ℓ es la nueva separación entre las cargas, además $x = \ell - \ell_0$. De nuevo supondremos que $x \ll \ell$, con lo que la anterior ecuación queda

$$- k_e \frac{Q_1 Q_2}{\ell^2} + Q_1 E = 0$$

Despejando para ℓ

$$\boldsymbol{\ell = \sqrt{\frac{k_e Q_2}{E}}}$$

(d)Ahora bien, cuando el campo lleva el resorte hasta su longitud original, el resorte ahora no está deformado por lo que la fuerza debido al resorte ahora es cero, esto es

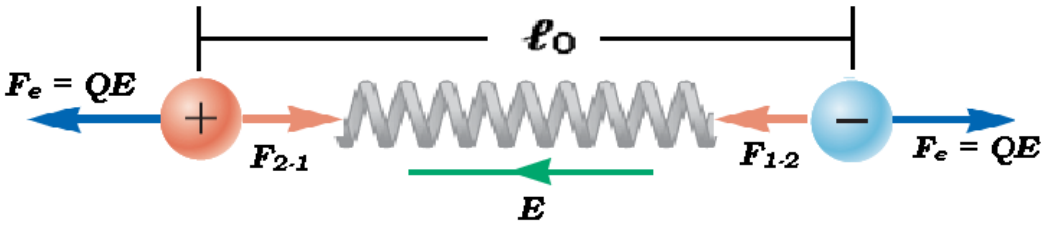


Figura 12. Autoría propia

$$-k_e \frac{Q_1 Q_2}{\ell_0^2} + Q_1 E = 0$$

Por lo que se tiene

$$\ell_0 = \sqrt{\frac{k_e Q_2}{E}}$$

4. el sistema que se ilustra en la figura 13 se encuentra en equilibrio. Determine: (a) el coeficiente de fricción estático ente el bloque y la mesa (b) la tensión en la cuerda sujeta al piso (*sugerencia, no tenga en cuenta la masa de las cargas)*

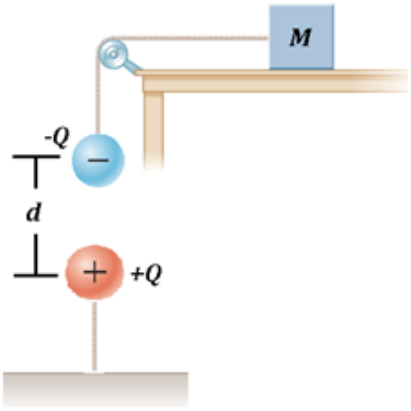


Figura 13. Autoría propia

Solución: Las cuerdas están tensas debido a la fuerza de atracción Coulombiana entre las cargas. Primero se procederá a realizar diagramas de cuerpo libre para cada uno de los cuerpos

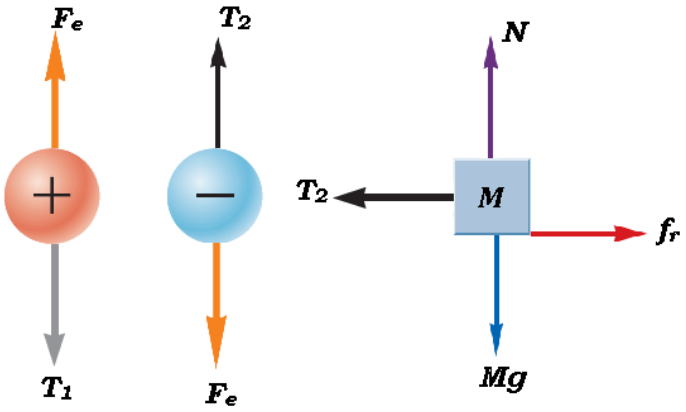


Figura 14. Autoría propia

Para la carga positiva se tiene

$$\sum F_y = 0$$

$$F_e - T_1 = 0$$

$$F_e = T_1 = k_e \frac{Q^2}{d^2}$$

Lo anterior por la ley de Coulomb. Ahora para la carga negativa

$$\sum F_y = 0$$

$$-F_e + T_2 = 0$$

$$\boldsymbol{F_e = T_2 = k_e \frac{Q^2}{d^2}}$$

Ahora para el bloque

$$\sum F_y = 0$$

$$N - Mg = 0 \implies N = Mg$$

$$\sum F_x = 0$$

$$f_r - T_2 = 0$$

$$f_r = T_2 = \mu_s N$$

Reemplazando T_2

$$\mu_s N = k_e \frac{Q^2}{d^2}$$

Despejando para μ_s

$$\boldsymbol{\mu_s = k_e \frac{Q^2}{Nd^2} = k_e \frac{Q^2}{Mgd^2}}$$

5. En una nube típica de tormenta, puede haber cargas eléctricas $+Q$ cerca de la parte superior y $-Q$ cerca de la parte inferior de la nube. Estas cargas suelen estar separadas por unos cuantos kilómetros. Una gota de llovizna con carga q y diámetro d, flota en el interior de una nube de tormenta. ¿Cuál es el valor del campo eléctrico (asumiéndolo como uniforme) al interior de la nube?

Solución. En este problema la nube de tormenta se puede simular como un par de placas plano paralelas cargadas (ver figura 15), esto debido a que como sabemos el campo eléctrico en la región entre dos placas es uniforme.

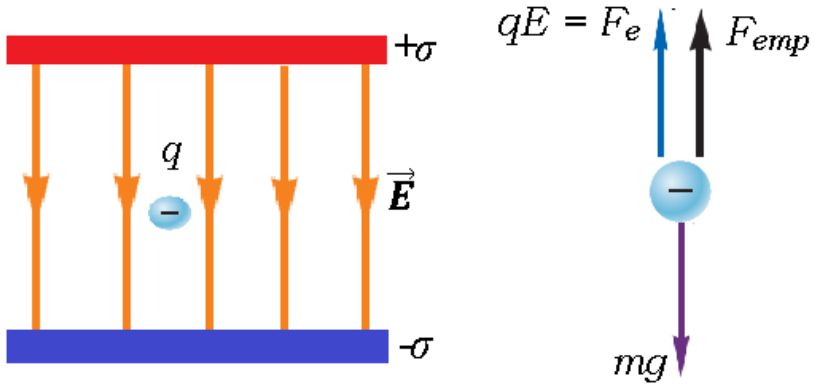


Figura 15. Autoría propia.

En la figura 15, se observan las fuerzas que actúan sobre la gota, por un lado, tenemos la acción de la fuerza de gravedad, peso, y de otro lado tenemos la fuerza que ejerce el medio sobre la gota. Si consideramos que la nube está formada de aire principalmente entonces esta es una fuerza de empuje, dada por el principio de Arquímedes. Además de las dos fuerzas mencionadas se tiene la fuerza que ejerce el campo eléctrico sobre la gota.

Puesto que la gota está en equilibrio se tiene

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{emp} - mg + qE = 0$$

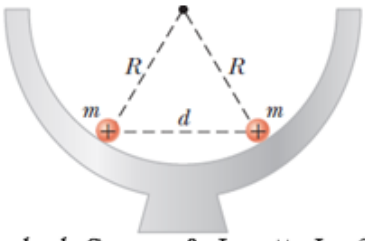
$$\rho_{aire} V_{gota} g - mg + qE = 0$$

$$\rho_{aire} \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 g - \rho_{agua} \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 g + qE = 0$$

$$\frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 g(\rho_{agua} - \rho_{aire}) = qE$$

$$\boldsymbol{E = \frac{\pi g d^3}{6q}(\rho_{agua} - \rho_{aire})}$$

6. Two identical beads each have a mass m and charge q. When placed in a hemispherical bowl of radius R with frictionless, nonconducting walls, the beads move, and at equilibrium, they are a distance d apart. (a) Determine the charge q on each bead. (b) Determine the charge required for d to become equal to 2R. (Serway & Jewett, Jr., 2019)



Tomado de Serway & Jewett, Jr., 20104

Figura 16

Solución: (a) Debido a la repulsión Coulombiana las partículas se separan hasta que quedan en equilibrio debido a la fuerza que le ejerce la pared del tazón a cada una de las partículas. En la figura 17 se ilustran las fuerzas que actúan sobre las cargas.

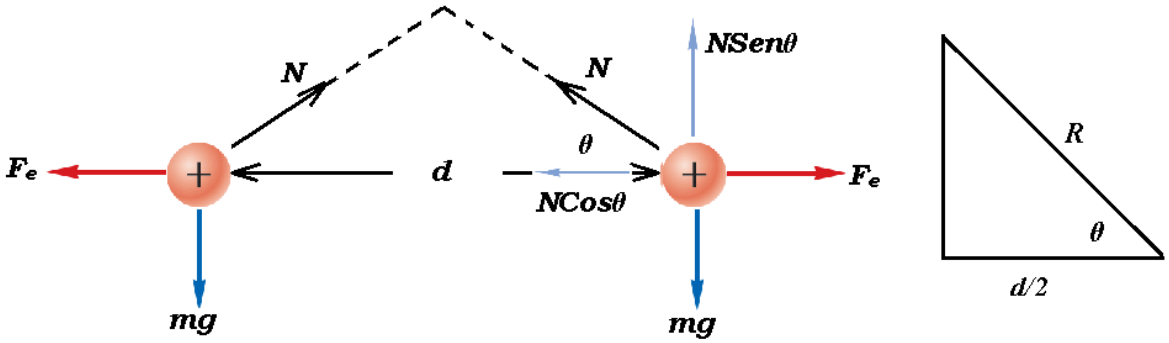


Figura 17. Autoría propia

Por la simetría del problema solo basta analizar una de las cargas. Puesto que las cargas están en equilibrio se tiene que

$$\sum F_x = 0$$

$$F_e - N\cos\theta = 0$$

$$k_e \frac{Q^2}{d^2} - N\cos\theta = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N \sin\theta - mg = 0$$

$$N = \frac{mg}{\sin\theta}$$

Al reemplazar esta normal en la ecuación de arriba se tiene

$$k_e \frac{Q^2}{d^2} - \frac{mg}{\sin\theta}\cos\theta = 0$$

$$k_e \frac{Q^2}{d^2} - mg\cot\theta = 0$$

Despejando para Q

$$Q = d\sqrt{\frac{mg\cot\theta}{k_e}}$$

De la figura se tiene

$$\cot\theta = \frac{d}{2\sqrt{R^2 - \left(d/2\right)^2}}$$

$$\cot\theta = \frac{d}{\sqrt{4R^2 - d^2}}$$

Reemplazando se tiene

$$\boldsymbol{Q = d\sqrt{\frac{mg}{k_e}\left(\frac{d}{\sqrt{4R^2 - d^2}}\right)}}$$

(b) Ahora bien, para saber cuál debe ser el valor de la carga para que la separación entre ellas sea de igual a *2R* (igual al diámetro) solo basta en la anterior ecuación cambiar *d* por *2R*

$$\boldsymbol{Q = 2R\sqrt{\frac{mg}{k_e}\left(\frac{2R}{\sqrt{4R^2 - (2R)^2}}\right)}}$$

Como se puede ver en esta ecuación al realizar el reemplazo, el denominador se hace cero y como todos sabemos la división por cero no está definida. Este resultado se interpreta que para esta situación no existe un valor de carga para el cual la separación de las cargas llegue a ser *2R*.

7. Two charged particles are located on the x axis. The first is a charge +Q at $x = -a$. The second is an unknown charge located at $x = +3a$. The net electric field these charges produce at the origin has a magnitude of $2k_eQ/a^2$. Explain how many values are possible for the unknown charge and find the possible values. (Serway & Jewett, Jr., 2019)

Solución: La situación se ilustra en la siguiente grafica

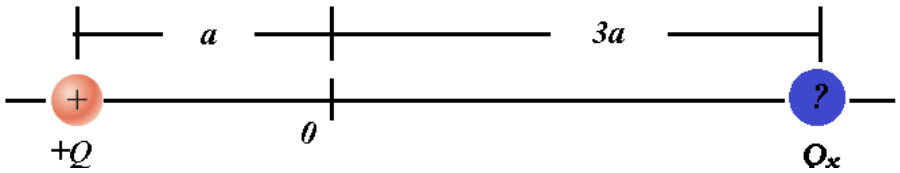


Figura 18. Autoría propia

Cada carga por si sola produce en el origen un campo eléctrico de tal manera que el campo total en el origen es la suma o superposición de los campos. Entonces de acuerdo con esto el campo total puede ir en la dirección *x* negativa o *x* positiva, es decir, existen dos direcciones posibles para el campo. El campo de la de la carga positiva va en la dirección *+x*, entonces básicamente quien va a modular la dirección del campo es la magnitud y signo de la carga desconocida Q_x. De acuerdo con lo anterior examinaremos las dos posibles direcciones del campo

i. *Campo en la dirección x positiva.* Como ya se mencionó el campo de la carga positiva va en la dirección *x positiva*, para que el campo total vaya en *x positiva* se necesita que la carga desconocida Q_x también produzca un

campo en la misma dirección que la carga positiva para poderlo sumar a este, la única forma en que el campo de la carga desconocida ira en la dirección *x positiva* es que esta sea negativa, tal como se puede ver en la siguiente figura

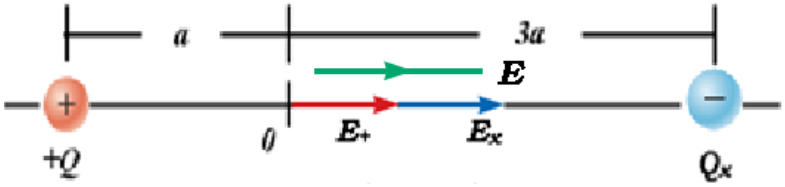


Figura 19. Autoría propia

De donde E_+ es el campo de la carga positiva y E_x es el campo de la carga desconocida, por lo tanto, se tiene

$$E_+ + E_x = {}^{2k_eQ}/_{a^2}$$

Por Coulomb se tiene

$$k_e\frac{Q}{a^2} + k_e\frac{Q_x}{(3a)^2} = \frac{2k_eQ}{a^2}$$

Realizando las simplificaciones correspondientes se tiene

$$Q + \frac{Q_x}{9} = 2Q$$

$$\boldsymbol{Q_x = -9Q}$$

Este sería el valor y el signo de la carga Q_x para que el campo total vaya en la dirección *x positiva.*

ii. *Campo en la dirección x negativa.* Para que el campo neto vaya en la dirección *x negativa* se necesita que Q_x sea positiva y mucho mayor que la carga positiva ubicada en $x = a$, puesto que está más alejada del origen

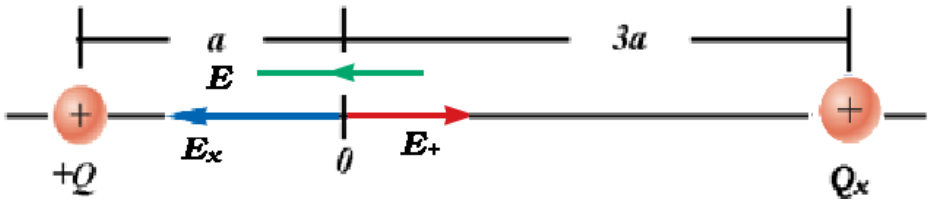


Figura 20. Autoría propia

De acuerdo con lo dicho se tiene que

$$E_+ - E_x = {}^{-2k_eQ}/_{a^2}$$

$$k_e\frac{Q}{a^2} - k_e\frac{Q_x}{(3a)^2} = -\frac{2k_eQ}{a^2}$$

Simplificando

$$Q - \frac{Q_x}{9} = -2Q$$

$$\boldsymbol{Q_x = 27Q}$$

De acuerdo con los resultados obtenidos entonces se tiene que

$$\boldsymbol{Si}\begin{cases}\boldsymbol{E_{neto} > 0, entonces\ Q_x = -9Q}\\ \boldsymbol{E_{neto} < 0, entonces\ Q_x = 27Q}\end{cases}$$

PROBLEMAS RESUELTOS DE CAMPO ELECTRICO

Preguntas de opción múltiple

1. Cuando a una placa metálica se le proporciona una carga positiva, ¿cuál de los siguientes hechos ocurre? (Bauer & Westfall, 2011)
   a) Protones (cargas positivas) se transfieren a la placa desde otro objeto.
   b) Electrones (cargas negativas) se transfieren desde la placa a otro objeto.
   c) Electrones (cargas negativas) se transfieren a la placa desde otro objeto, y protones (cargas positivas) también se transfieren a la placa desde otro objeto.
   d) Depende de si el objeto que transporta la carga es conductor o aislante.

Respuesta: Opción b

Explicación: En los conductores lo que siempre se transfiere son las cargas negativas (electrones), entonces si la placa quedo cargada positivamente significa que tiene un exceso de protones o dicho de otra forma una carencia de electrones los cuales han sido transportados desde la placa hasta el otro objeto.

2. La fuerza entre una carga de 25 μC y una carga de –10 μC es 8.0 N. ¿Cuál es la separación entre las dos cargas? (Bauer & Westfall, 2011)

a) 0.28 m b) 0.53m c) 0.45 m d) 0.15 m

Repuesta: Opción b

Explicación: La magnitud de la fuerza de atracción o de repulsión entre dos partículas cargadas Q_1 y Q_2 está dada por la ley de Coulomb

$$F = {k_e|Q_1||Q_2|}/{r^2}$$

De donde, k_e es la constante eléctrica y tiene un valor de aproximado de $9*10^9$ Nm^2/C^2 y r es la distancia de separación entre las cargas. Por lo tanto, de esta ecuación debemos despejar r, entonces

$$r = \sqrt[2]{{k_e|Q_1||Q_2|}/{F}}$$

Reemplazando en esta ecuación

$$r = \sqrt[2]{{9x10^9 * 25x10^{-6} * 10x10^{-6}}/{8}}$$

$$\boldsymbol{r} = 0.53 \text{ m}$$

Nota: hay que aclarar que todas las magnitudes están en el sistema de unidades internacional (SI)

3. Una carga Q_1 está ubicada sobre el eje x en x = a. ¿Dónde debe colocarse una carga $Q_2 = -4Q_1$ para producir una fuerza electrostática neta igual a cero sobre una tercera carga, $Q_3 = Q_1$, situada en el origen? (Bauer & Westfall, 2011)

a) En el origen b) En x = 2a c) En x = –2a d) En x = –a

Respuesta: opción b

Explicación:

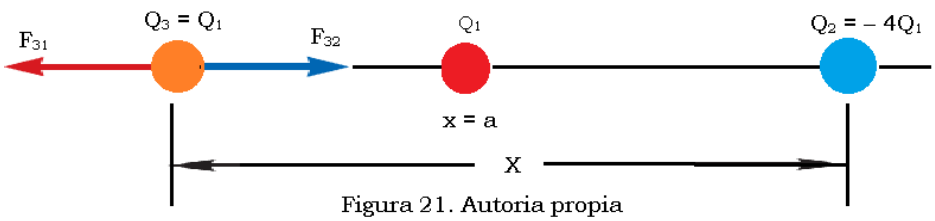


Figura 21. Autoria propia

Puesto que la fuerza electrostática neta sobre Q_3 debido a la interacción de esta con Q_1 y Q_2 debe ser igual a cero,

entonces esto nos dice que F_{31} (fuerza sobre 3 debido a 1) y F_{32} (Fuerza sobre 3 debido a 2) deben ser iguales y opuestas. Ahora bien, por la Ley de Coulomb, se tiene que la fuerza electrostática entre dos cargas puntuales es directamente proporcional al producto de las cargar e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre estas; dado que Q_2 es mayor que Q_1, entonces debe estar a una mayor distancia de Q_3 de la que esta Q_1. Ahora bien, Q_1 repele a Q_3, por ser ambas positivas lo cual implica que F_{31} apunta hacia la izquierda; por lo tanto, F_{32} debe apuntar a la derecha, dado que Q_2 es negativa entonces debe estar situada a la derecha de Q_3 y como la distancia debe ser mayor a la distancia de Q_1, se concluye que la respuesta es la opción (b), es decir x = 2a. Comprobemos nuestro análisis.

$$F_{31} = F_{32}$$

$$k_e \frac{Q_3 Q_1}{a^2} = k_e \frac{Q_3 Q_2}{x^2}$$

Simplificando a ambos lados de la ecuación queda $\frac{Q_1}{a^2} = \frac{Q_2}{x^2}$, ahora reemplazando Q_1 y Q_2 y simplificando se tiene

$$\frac{1}{a^2} = \frac{4}{x^2}$$

Solucionando da $x = \pm 2a$, pero ya sabemos por el análisis hecho que Q_2 no puede estar en x = - 2ª, pues la fuerza F_{32} iría hacia la izquierda.

4. ¿Cuál de los siguientes sistemas tiene la carga más negativa? (Bauer & Westfall, 2011)

a) 2 electrones

b) 3 electrones y un protón

c) 5 electrones y 5 protones

d) N electrones y N – 3 protones

e) 1 electrón

Respuesta: Opción d

Explicación: Opción a, se tiene una carga total $Q_a = -2e$, (e, es la carga elemental)

Opción b, $Q_b = -3e + e = -2e$

Opción c, $Q_c = -5e + 5e = 0$

Opción d, $Q_1 = -Ne$, $Q_2 = (N - 3)e = Ne - 3e$, entonces la carga total es $Q_d = Q_1 + Q_2 = -Ne + Ne - 3e = -3e$

Opción e), $Q_d = -1e$

5. Dos cargas puntuales están fijas en el eje x: $q_1 = 6.0\mu C$ está en el origen, O, con $x_1 = 0.0$ cm, y $q_2 = -3.0\ \mu C$ está situada en el punto A, con $x_2 = 8.0$ cm. ¿Dónde debería colocarse una tercera carga, q_3, sobre el eje x, de modo que la fuerza electrostática total que actúa sobre ésta sea cero? (Bauer & Westfall, 2011)

a) 19 cm b) 27 cm c) 0.0 cm d) 8.0 cm e) –19 cm

Respuesta: opción e

Explicación: independiente del signo de q_3 esta no puede ubicarse entre q_1 y q_2, dado que los signos de estas son opuestos las fuerzas que estas harían sobre q_3 irían hacia el mismo lado, de ahí que q_3 deberá estar a la izquierda de q_1 o a la de recha de q_2, pero se tiene que en magnitud $q_1 > q_2$, entonces q_3 debe estar más cerca de q_2 que de q_1, por lo tanto, deberá ubicarse a la derecha de q_2

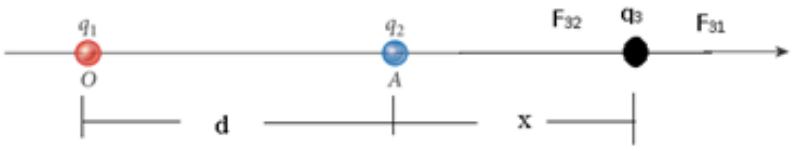


Figura 22. Autoría propia

Dado que la fuerza sobre q_3 es cero entonces:

$$F_{31} = F_{32}$$

$$k_e \frac{Q_3 Q_1}{(d+x)^2} = k_e \frac{Q_3 Q_2}{x^2 {Q_1}^2}$$

Simplificando tenemos:

$$\frac{Q_1}{(d+x)^2} = \frac{Q_2}{x^2}$$

Transponiendo términos, entonces:

$$x^2 Q_1 = (d+x)^2 Q_2 \Rightarrow x^2 Q_1 = x^2 Q_2 + 2xdQ_2 + d^2 Q_2$$

debemos solucionar para x

$$(Q_1 - Q_2)\, x^2 - 2xdQ_2 - d^2 Q_2 = 0$$

$$x = \frac{-(-2dQ_2) \pm \sqrt{(-2dQ_2)^2 - 4(Q_1 - Q_2)(-d^2 Q_2)}}{2(Q_1 - Q_2)}$$

Reemplazando los valores

x

$$= \frac{-(-2 * 0.08 * 3 * 10^{-6}) \pm \sqrt{(-2 * 0.08 * 3 * 10^{-6})^2 - 4(6 * 10^{-6} - 3 * 10^{-6})(-0.08^2 * 3 * 10^{-6})}}{2(6 * 10^{-6} - 3 * 10^{-6})}$$

$$x = \frac{0.48 \pm 0.68}{6}$$

$$x_1 = \frac{0.48 + 0.68}{6} = 0.19\, m$$

$$x_1 = \frac{0.48 - 0.68}{6} = -0.03$$

Esta respuesta descarta lo dicho arriba

6. ¿Cuál de las siguientes situaciones produce la mayor fuerza neta sobre la carga Q? (Bauer & Westfall, 2011)

a) La carga Q = 1 C está a 1 m de una carga de –2 C.
b) La carga Q = 1 C está a 0.5 m de una carga de –1 C.
c) La carga Q = 1 C está a la mitad del camino entre una carga de –1C y una carga de 1 C separadas 2 m entre sí.
d) La carga Q = 1 C está a la mitad del camino entre dos cargas de –2 C separadas 2 m entre sí.
e) La carga Q = 1 C está a una distancia de 2 m de una carga de –4 C.

Respuesta: opción b

Explicación: Puesto que la fuerza es directamente proporcional a la carga e inversamente proporcional a la distancia, y como la distancia disminuye a la mitad entonces la fuerza se cuadruplica**.**

7. Dos protones próximos entre sí, pero sin ningún otro objeto cerca (Bauer & Westfall, 2011)

a) Se aceleran alejándose entre sí.
b) Permanecen inmóviles.
c) Se aceleran aproximándose entre sí.
d) Se atraen mutuamente a velocidad constante.
e) Se alejan uno de otro a velocidad constante.

Respuesta: opción a

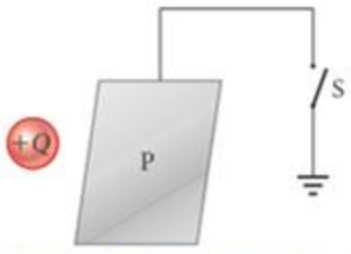
Explicación: Dado que son cargas del mismo signo, entonces estas se repelen y cada uno de ellos experimenta una fuerza neta debido a su interacción con el otro, por lo tanto, hay una aceleración.

8. Dos esferas de metal ligero están suspendidas de hilos aislantes, próximas entre sí. Una esfera tiene una carga neta; la otra no. Las esferas (Bauer & Westfall, 2011)
   a) Se atraen entre sí.
   b) No ejercen ninguna fuerza electrostática entre sí.
   c) Se repelen mutuamente.
   d) Hacen cualquiera de las cosas anteriores dependiendo del signo de la carga sobre una de las esferas.

Respuesta: Opción a

Explicación: Dado que son metálicas la esfera cargada induce en la superficie de la esfera descargada una carga opuesta, entonces por eso inicialmente la atrae, pero una vez se tocan las dos esferas quedan cargadas de igual manera y se van a repeler.

9. Una placa metálica está conectada por un conductor a tierra por medio de un interruptor. El interruptor está inicialmente cerrado. Una carga +Q se acerca a la placa sin tocarla y luego se abre el interruptor. Una vez que éste se abre se retira la carga +Q. ¿Cuál es entonces la carga en la placa? (Bauer & Westfall, 2011)



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. *Física; para ingenierías y ciencias con física moderna*

Figura 23.

a) La placa está sin carga.
b) La placa está cargada positivamente.
c) La placa está cargada negativamente.
d) La placa puede estar cargada positiva o negativamente, dependiendo de la carga que tenga antes que se acerque +Q.

Respuesta: opción c

Explicación: La placa se carga por inducción. Cuando se carga un conductor por el método de inducción la carga que este adquiere es opuesta a la carga utilizada para cargarlo.

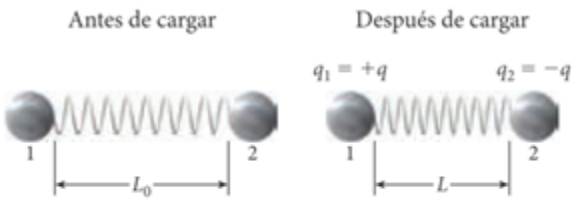
10. Usted acerca una barra de caucho cargada negativamente a un conductor conectado a tierra sin tocarlo. Luego desconecta la tierra. ¿Cuál es el signo de la carga sobre el conductor una vez que retira la barra cargada? (Bauer & Westfall, 2011)
    a) Negativa.
    b) Positiva.
    c) Sin carga.
    d) No es posible determinarlo a partir de la información proporcionada.

Respuesta: opción b

Explicación: Ver respuesta 9

11. Dos esferas metálicas idénticas que inicialmente no tienen carga, 1 y 2, están conectadas por un resorte aislante (longitud sin estirar L_0 = 1.00 m, la constante del resorte es k = 25.0 N/m), como muestra la figura 24. Luego, las esferas se cargan con +q y –q y el resorte se contrae hasta una longitud L =

0.635 m. Recuerde que la fuerza ejercida por un resorte es Fs = k∗Δx, donde Δx es el cambio de longitud del resorte a partir de su posición de equilibrio. Determine la carga q. Si el resorte se recubre con metal para hacerlo conductor, ¿cuál es la nueva longitud del resorte? (Bauer & Westfall, 2011)



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. *Fisica; para ingenierías y ciencias con física moderna*

Figura 24

Análisis y discusión: Cuando se le coloca a las cargas las pequeñas esferas estas interactúan entre sí, es decir, ahora son dos partículas cargadas unidas por medio de un resorte, por lo tanto, cada una de ellas está sometida a dos fuerzas: la fuerza eléctrica que es atractiva puesto que ellas tienen cargas opuestas, esta fuerza eléctrica está dada por la fuerza de Coulomb. Como las cargas están unidas por medio del resorte, y la fuerza eléctrica trata de juntarlas entonces el resorte se comprime y por la ley de Hooke, el resorte ejercerá sobre cada una de las cargas una fuerza opuesta a la dirección de la deformación; esquemáticamente

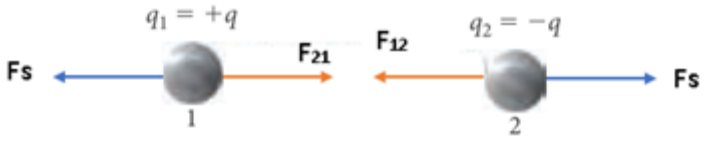


Figura 25. Autoría propia

Cuando las cargas están en equilibrio la sumatoria de fuerzas sobre cada una de ellas es cero, esto implica que las dos fuerzas que son iguales en magnitud, esto es

$$F_s = F_{21} \quad ; \quad F_s = F_{12}$$

$$F_s = k * \Delta x;\ \Delta x = L_0 - L$$

$$F_{21} = k_e \frac{|q_1||q_2|}{L^2}$$

Igualando, tenemos

$$k * \Delta x = k_e \frac{|q_1||q_2|}{L^2}$$

$$k * (L_0 - L) = k_e \frac{|q_1||q_2|}{L^2} \quad puesto\ que\ |q_1| = |q_2| = q, entonces$$

$$k * (L_0 - L) = k_e \frac{q^2}{L^2}$$

Despejando q, se tiene:

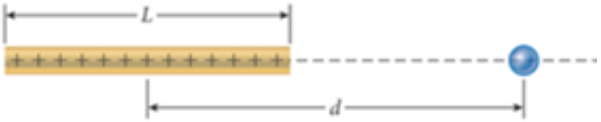
$$\sqrt[2]{\frac{k * (L_0 - L) * L^2}{k_e}} = q$$

reemplazando los valores dados

$$\sqrt[2]{\frac{25 * (1 - 0.635) * L^2}{9 * 10^9}} = q = 2.0219 * 10^{-5} \cong 20.22\ \mu C$$

Ahora bien, cuando el resorte se vuelve conductor migra carga desde la esfera negativa a la positiva para neutralizarse, es decir el sistema tiene una carga neta cero, las esferas de descargan; por lo tanto, el resorte regresa a su posición no deformada.

12. La figura 26 muestra una barra delgada de longitud L, cargada uniformemente con una carga total Q. Encuentre una expresión para la magnitud de la fuerza electrostática



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. *Física; para ingenierías y ciencias con física moderna*

Figura 26

que actúa sobre un electrón ubicado sobre el eje de la barra a una distancia d del punto medio de la barra. (Bauer & Westfall, 2011)

Solución: Se divide la barra en pequeños trozos, cada uno de estos trozos ejerce una pequeña fuerza sobre sobre el electrón

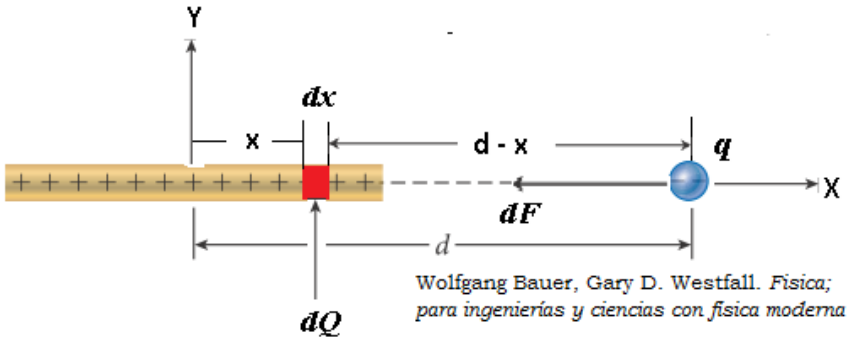


Figura 27.

$$d\vec{F} = k_e \frac{q * dQ}{r^2} (-\hat{\imath})$$

Dado que cada trozo de carga dQ en que se ha dividido la barra genera una fuerza sobre la carga q, entonces, para obtener la fuerza neta que causa la barra sobre q debemos sumar todas estas fuerzas, esto es:

$$\vec{F} = \int d\vec{F}$$

Reemplazando $d\vec{F}$ se tiene

$$\vec{F} = k_e * q \int \frac{dQ}{(d-x)^2} (-\hat{\imath})$$

Para poder solucionar esta integral se debe saber cómo se distribuye la carga que tiene la barra a lo largo esta.

Para esto definiremos la densidad lineal de carga (carga dividida entre la longitud):

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} = \frac{dQ}{dx}$$

De acuerdo con el enunciado del problema la carga de la barra de distribuye de manera uniforme a lo largo de esta; lo cual significa que si tomamos trozos de la misma longitud ubicados en diferentes partes de la barra tendrán la misma cantidad de carga. Lo que quiere decir esto es que la densidad lineal de carga es constante (λ = Cte).

Con esto entonces se tiene:

$$dQ = \lambda * dx$$

Reemplazando en la integral

$$\vec{F} = k_e * q * \lambda \int \frac{dx}{(d-x)^2} (-\hat{\imath})$$

Esta integral se extiende sobre toda la longitud de la barra. Para poder calcular esta integral debemos realizar una sustitución, esto es: $u = d - x \Rightarrow du = -dx$, realizando la sustitución

$$\vec{F} = k_e * q * \lambda \int \frac{-du}{u^2} (-\hat{\imath}),$$

dado que la integral se realiza sobre toda la barra

$$\vec{F} = -k_e * q * \lambda \int_{-l/2}^{l/2} \frac{du}{u^2} (-\hat{\imath}) = -2 * k_e * q * \lambda \int_0^{l/2} \frac{du}{u^2} (-\hat{\imath})$$

$$\vec{F} = -2 * k_e * q * \lambda * \left[\frac{-1}{u}\right]_0^{l/2} (-\hat{\imath}) ,$$

cambiando u por (d – x), se tiene

$$\vec{F} = -2 * k_e * q * \lambda * \left[\frac{-1}{d-x}\right]_0^{l/2} (-\hat{\imath})$$

$$\vec{F} = 2 * k_e * q * \lambda * \left[\frac{1}{d - l/2} - \frac{1}{d}\right] (-\hat{\imath})$$

$$\vec{F} = 2 * k_e * q * \lambda * \left[\frac{l}{d * (2d - l)}\right](-\hat{\imath})$$

Recordando que $Q = \lambda * l$, entonces

$$\vec{F} = 2 * k_e * q * \left[\frac{Q}{d * (2d - l)}\right](-\hat{\imath})$$

Y esta es la fuerza que experimenta la carga q debido a su interacción con **Q.**

13. Suponga que la Tierra y la Luna portan cargas positivas de la misma magnitud. ¿Cuán grande debe ser la carga necesaria para producir una repulsión electrostática igual a 1.00% de la atracción gravitacional entre los dos cuerpos? (Bauer & Westfall, 2011)

Análisis y discusión: La fuerza de atracción gravitacional entre dos cuerpos puntuales de masa M_1 y M_2, separados una distancia *r*, viene dada por la *Ley de gravitación universal de Newton*:

$$\vec{F}_g = -G\frac{M_1 M_2}{r^2}\,\hat{r}$$

Donde G es la contante de Gravitación Universal y tiene un valor de $6.67 * 10^{-11} Nm^2/\,kg^2$. Y la fuerza de atracción o repulsión entre dos partículas cargadas está dada por la Ley de Coulomb. Dado que la distancia entre la luna y la tierra es mucho mayor que sus tamaños, entonces podemos tratar a estas como partículas, y, por lo tanto, las ecuaciones planteadas son válidas.

De acuerdo con lo planteado por el problema lo que se necesita es obtener el valor de la carga que hace que la fuerza de repulsión electrostática entre la tierra y la luna, si estas estuviesen cargadas, sea cien veces menor que la fuerza de atracción gravitacional entre ellas debido a las masas. Esto es:

$$F_{electrica} = 0.01\, F_{gravitacional}$$

$$k_e * \frac{Q_{Tierra} * Q_{Luna}}{r^2} = 0.01 * G \frac{M_{Luna} * M_{Tierra}}{r^2}$$

Dado que $Q_{Tierra} = Q_{Luna} = Q$, entonces se tiene:

$$k_e * \frac{Q^2}{r^2} = 10^{-2} * G \frac{M_{Luna} * M_{Tierra}}{r^2}$$

Despejando Q, se tiene

$$Q = \sqrt[2]{10^{-2} * G \frac{M_{Luna} * M_{Tierra}}{k_e}}$$

Reemplazando los valores:

$$Q = \sqrt[2]{10^{-2} * 6.67 * 10^{-11} * \frac{5.97^{24} * 7.35^{22}}{8.99 * 10^9}}$$

$$Q = 5.7 * 10^{12}\ C$$

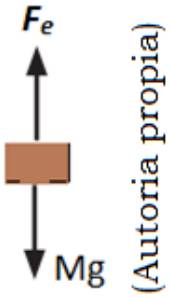
Esta debería ser el valor de la carga que deberían tener tanto la tierra como la luna para que la repulsión electrostática entre ella sea cien veces menor que la atracción gravitacional.

14. Su hermana desea participar en la feria anual de ciencia en su escuela preparatoria y le pide que le sugiera algún proyecto emocionante. Le aconseja que experimente con el extractor de electrones que usted acaba de crear para suspender su gato en el aire. Le dice que compre una placa de cobre y la atornille al techo de su cuarto y luego use el extractor de electrones para transferir electrones de la placa al gato. Si el gato pesa 7.00 kg y está suspendido a 2.00 m debajo del techo, ¿cuántos electrones se han extraído del gato? Suponga que el gato y la placa de metal son cargas puntuales. (Bauer & Westfall, 2011)

Análisis y discusión: Si se transfieren electrones de la placa al gato lo que va a suceder es que tanto la placa como el gato quedaran cargados, pero el gato queda cargado negativamente y la placa positivamente (la misma cantidad de carga cada uno); entonces la placa atraerá al gato. Si la fuerza es suficiente para vencer la atracción gravitacional (peso) el gato se elevará. Esto es,

$$F_e = Mg$$

$$k_e \frac{Q_{gato} * Q_{placa}}{r^2} = Mg$$



(Autoria propia)

Figura 28

Dado que $Q_{gato} = Q_{placa} = Q$ entonces:

$$k_e \frac{Q^2}{r^2} = Mg$$

Despejando para Q se tiene:

$$Q = \sqrt[2]{\frac{Mg * r^2}{k_e}} = r * \sqrt[2]{\frac{Mg}{k_e}}$$

Reemplazando los valores dados: M = 7.00kg, r = 2m

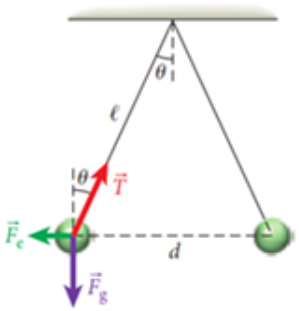
$$Q = 2 * \sqrt[2]{\frac{7 * 9.8}{9 * 10^9}}$$

$$Q = 1.75*10^{-5}\ C.$$

Ahora para obtener el número de electrones se divide la carga con la que queda el gato entre la carga de un electrón ($1.6*10^{-19}$ C)

$$n = \frac{1.75 * 10^{-5}}{1.6 * 10^{-19}} = 1.09 * 10^{15}\ Electrones$$

15. Dos bolas tienen la misma masa de 0.681 kg y cargas idénticas de 18.0 μC. Cuelgan del techo sobre cuerdas de la misma longitud, como muestra la figura 29. Si el ángulo de las cuerdas con respecto a la vertical es 20.0°, ¿cuál es la longitud de las cuerdas? (Bauer & Westfall, 2011)



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. Física; para ingenierías y ciencias con física moderna

Figura 29

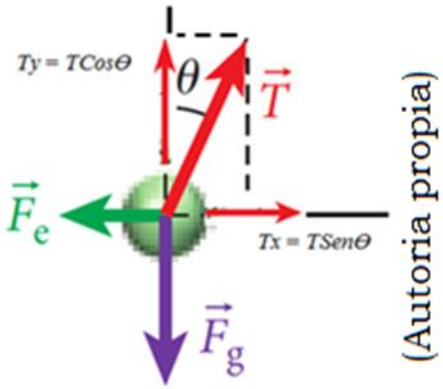
***Análisis y discusión*:** En la figura 30 se observan las fuerzas que actúan sobre una de las cargas, cabe recordar que son las mismas que actúan sobre la otra carga. Estas fuerzas son:

$$\vec{F}_e: Fuerza\ electrica$$

$$\vec{T}: Tension$$

$$\vec{F}_g = Fuerza\ gravitacional\ (peso)$$

La fuerza eléctrica se debe a la repulsión electrostática entre las cargas, La fuerza gravitacional es la atracción que ejerce la tierra sobre la masa (peso) y la tensión que es la fuerza que ejerce la cuerda sobre la carga, y hace que esta permanezca en equilibrio.



(Autoria propia)

Figura 30.

Dado que la carga se encuentra en equilibrio, esto es, la sumatoria de todas las fuerzas que actúan sobre ella es cero. Se procederá ahora a descomponer las fuerzas que están inclinadas para aplicar las leyes de Newton por componentes.

$$\sum F_y = 0$$

$$T\cos\theta - F_g = 0$$

$$T\cos\theta = F_g = Mg$$

$$T = \frac{Mg}{\cos\theta}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$T\sin\theta - F_e = 0$$

$$T\sin\theta = F_e = k_e\frac{Q_1 * Q_2}{d^2}$$

Reemplazando T, y con $Q_1 = Q_2 = Q$, entonces

$$\frac{Mg}{\cos\theta} * \sin\theta = k_e\frac{Q^2}{d^2}$$

$$\tan\theta * Mg = k_e\frac{Q^2}{d^2}$$

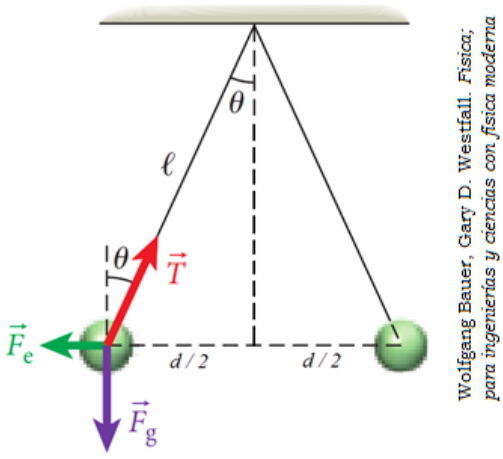


Figura 31.

Para cualquiera de los triángulos de la figura, se tiene: $d = 2 * l * \sin\theta$, reemplazando en la ecuación anterior

$$\tan\theta * Mg = k_e \frac{Q^2}{(2 * l * \sin\theta)^2}$$

Despejando l,

$$l = \sqrt[2]{k_e \frac{Q^2}{(2 * \sin\theta)^2 \tan\theta * Mg}}$$

Simplificando se tiene:

$$l = \frac{Q}{2 * \sin\theta} \sqrt[2]{\frac{k_e}{\tan\theta * Mg}}$$

16. Un anillo de radio a con una densidad lineal de carga uniforme λ. En un punto a una distancia x, sobre su eje se coloca una partícula con carga $-Q$. Obtener la fuerza que ejerce el anillo sobre la partícula. (Serway & Jewett, Jr, 2008)

***Análisis y discusión*:** Primero calcularemos el campo eléctrico debido al anillo, y luego aplicando la ecuación $\vec{F} = Q\vec{E}$. Para calcular el campo eléctrico del anillo; dado que este, tiene una carga una carga distribuida se divide en muchos trozos, se toma uno de los trozos y se calcula el campo eléctrico debido a este en el punto donde deseamos calcular el campo del anillo. El campo del anillo será la suma de los campos que produce cada uno de los trozos. Dado que cada trozo tiene una longitud infinitesimal, tendrá entonces una cantidad infinitesimal de carga la cual generará un campo infinitesimal dado por:

$$d\vec{E} = k_e \frac{dQ}{r^2} (\hat{r})$$

Tal como se puede observar este campo está inclinado respecto del eje *x;* lo cual quiere decir que el campo va a tener dos componentes una paralela al eje x (dE_x), y otra perpendicular a este (dE_y); cómo se puede observar en la figura 32.

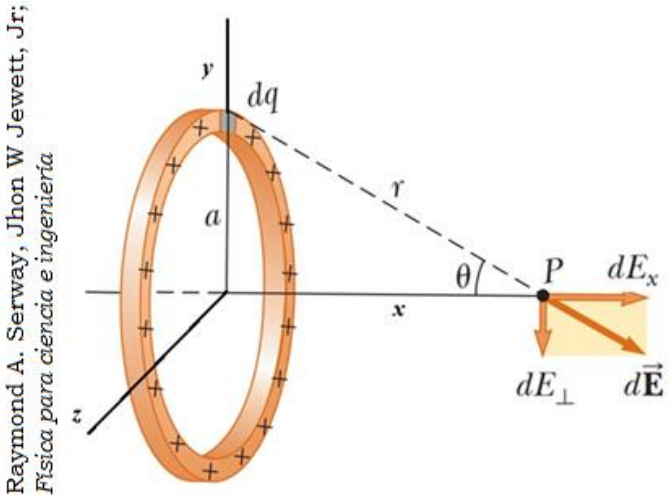


Figura 32

Si se toma un trozo simétrico (***I)*** de carga al que se tomó anteriormente (***S***), se tendrá que este también generara un pequeño campo en P, con sus respectivas componentes paralelas al eje ***x*** (dE_x) y perpendicular a este (dE_y), y tal como se puede ver las componentes perpendiculares se cancelan entre sí,

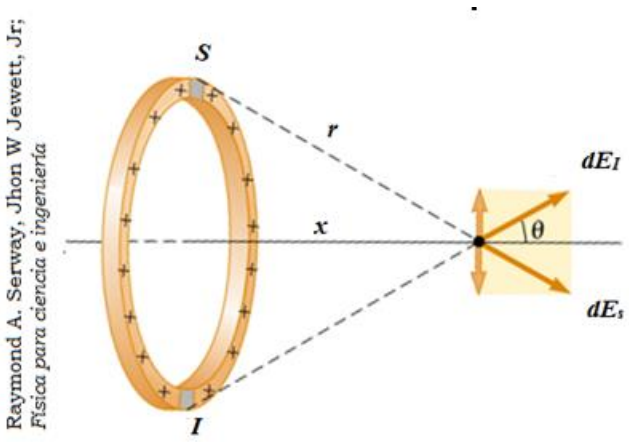


Figura 33

lo cual quiere decir que solamente se tendrá campo en la dirección del eje del anillo, el eje *x*.

$$dE_x = k_e \frac{dQ}{r^2} \cos\theta$$

Integrando la anterior expresión, se tiene

$$E_x = \int k_e \frac{dQ}{r^2} \cos\theta$$

Dado que al momento de sumar las contribuciones al campo de cada trozo de carga estos se encuentran a la misma distancia; pues estamos calculando el campo sobre el eje de simetría del anillo, y además en ángulo θ, tampoco varia; por lo tanto, se pueden sacar de la integral, dando como resultado la integral sobre la carga, esto es:

$$E_x = k_e \frac{Cos\theta}{r^2} \int dQ = k_e \frac{x * Cos\theta}{r^2} Q$$

De la figura

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt[2]{a^2 + x^2}}$$

Con lo cual da:

$$E_x = k_e \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} Q$$

La anterior expresión nos permite obtener el valor del campo eléctrico a una distancia ***x***, sobre el eje de simetría de un anillo cargado.

Casos especiales*:*

I. *Campo en el centro del anillo*. En el centro del anillo $x = 0$, por lo tanto, $E = 0$, lo cual está de acuerdo con nuestra intuición física debido a la simetría circular del anillo

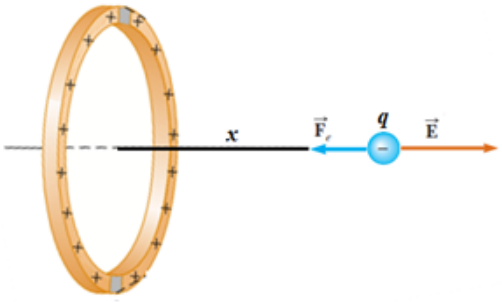
II. $x \gg a$, En este caso la expresión $(a^2 + x^2)^{3/2}$ se aproxima a x^3, pues ***a*** es despreciable frente a *x*, al realizar esta aproximación en la expresión para el campo del anillo da como resultado:

$$E_x = k_e \frac{Q}{x^2} Q$$

Que el campo debido a una carga puntual a una distancia x de esta. Lo anterior quiere decir que para grandes distancias comparadas con el radio del anillo este se comporta como una carga puntual.

17. *Movimiento de una partícula con carga opuesta colocada en un punto sobre el eje del anillo.* (Serway & Jewett, Jr, 2008)

***Análisis y discusión*:** A continuación, estudiaremos lo que sucede cuando se coloca una carga puntual de signo contrario a la del anillo a una pequeña distancia x del centro del anillo, pero sobre el eje de este; tal como se ilustra en la siguiente figura 34.



Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr;
Física para ciencia e ingeniería

Figura 34.

La fuerza que experimenta cualquier partícula cargada en un campo eléctrico está dada por:

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$$

Dado que partícula es negativa entonces la fuerza que experimenta va en dirección opuesta al campo, en este caso hacia la izquierda. El movimiento de la partícula *no* es un movimiento uniformemente acelerado, puesto que la aceleración depende de la posición de la partícula, esto es

$$\frac{q}{m}\vec{E} = \vec{a} = \frac{q}{m}\ k_e \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}\ Q(-\hat{\imath})$$

Donde se ha cambiado el radio a del anillo por R para evitar confusiones. Cuando la partícula está en el origen de coordenadas la aceleración es cero (velocidad máxima), pero esto no significa que la carga se detenga allí, la carga sigue "de largo" debido a la inercia; una vez que ha pasado por el centro del anillo empieza a actuar sobre ella la fuerza del campo que esta vez va hacia la derecha y empieza a frenarla hasta que su velocidad es cero, esto ocurre a una distancia igual a la que fue soltada. Iniciando de nuevo su movimiento hacia la derecha, esto se sigue repitiendo, es decir, la partícula oscilara alrededor del centro del anillo indefinidamente. Conclusión, el movimiento de la carga será oscilatorio. Ahora surge la pregunta: ¿este movimiento oscilatorio será armónico simple? Para dar respuesta a esta pregunta debemos tener en cuenta que un objeto está animado de movimiento armónico simple, cuando la aceleración que este posee es directamente proporcional al negativo del desplazamiento esto es; si el cuerpo se mueve en la dirección x, entonces su aceleración estaría dada por:

$$a = -cte * x$$

Expresión que no concuerda para la aceleración de la carga, entonces se debe realizar alguna aproximación. Para que se cumpla la condición se debe tener que el radio R, del anillo sea mucho mayor que el desplazamiento x que sufre la carga ($R \gg x$).Con esta aproximación la aceleración para la carga quedaría:

$$a = -\frac{q}{m}\ k_e \frac{Q}{R^3}\ x$$

La cual se puede expresar como:

$$a = -w^2\ x$$

De donde w es una constante positiva y estaría dada por:

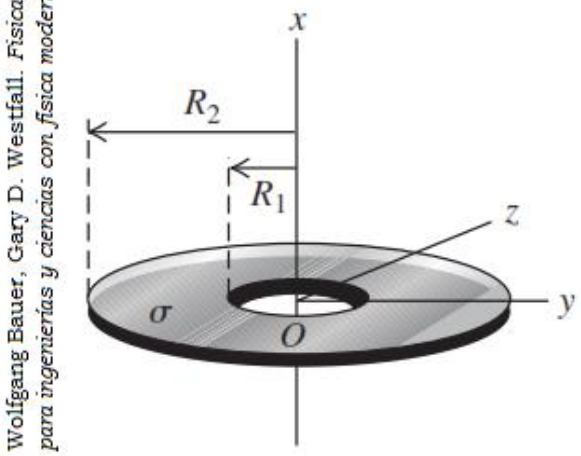
$$w = \sqrt{\frac{k_e Q q}{m R^3}}$$

Ahora si podemos afirmar que la carga q realiza un M.A.S. La constante w se interpreta como la frecuencia angular de movimiento. Ahora bien, dado que $w = \frac{2\pi}{T}$, entonces el periodo T del movimiento será:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k_e Q q}{mR^3}} \;\Rightarrow\; T = 2\pi\sqrt{\frac{mR^3}{k_e Q q}}$$

Tal como se puede ver el periodo del movimiento depende tanto de la masa de la partícula como de la carga de esta; además del radio y la carga del anillo.

18. Un disco delgado con un agujero circular en el centro, llamado *corona circular*, tiene un radio interior R_1 y un radio exterior R_2. El disco tiene una densidad superficial de carga uniforme y positiva σ en su superficie. *a*) Determine la carga eléctrica total en la corona circular. *b*) La corona circular se encuentra en el plano *yz*, con su centro en el origen. Para un punto arbitrario en el eje *x* (el eje de la corona circular), encuentre la magnitud y la dirección del campo eléctrico Considere puntos arriba y abajo de la corona circular en la figura. (Bauer & Westfall, 2011)



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. *Física; para ingenierías y ciencias con física moderna*

Figura 35.

***Análisis y discusión*:** Primero que todo para solucionar este problema podemos empezar por ver la corona como un "disco compacto". Con esta imagen podemos ver ahora la corona como compuesta por una serie de anillos cada uno de ellos muy delgado, de un espesor *dR* y una pequeña cantidad de carga *dQ*. La figura 36, muestra un anillo típico. Ahora bien, dado que la densidad superficial de la corona es uniforme será la misma del anillo. Por definición se tiene que la cantidad de carga *dQ*, que tiene este anillo es:

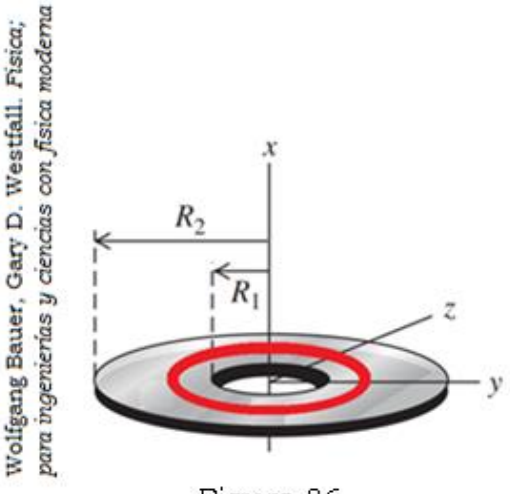


Figura 36.

$$dQ_{anillo} = \sigma * dA$$

Donde *dA* es el área de anillo. Si cortamos el anillo y lo estiramos se puede ver un pequeño rectángulo cuya base es la longitud del anillo y su altura es el espesor del anillo, por lo tanto, el área del anillo (rectángulo) es: *2πR*dR* y la cantidad de carga que hay en el anillo típico es: $dQ = \sigma * 2\pi R * dR$, para hallar la carga de la corona se debe sumar (integrar) la carga de todos los anillos comprendidos entre R_1 y R_2, esto es:

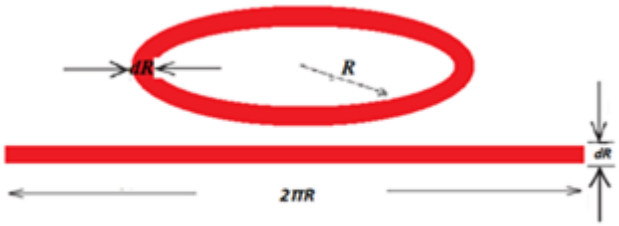


Figura 37. Autoría propia

$$Q_{corona} = \int dQ_{anillo} = \int_{R_1}^{R_2} \sigma * 2\pi R * dR = 2\pi\sigma \int_{R_1}^{R_2} R * dR$$

$$Q_{corona} = \pi\sigma(R_2^2 - R_1^2)$$

Ahora calcularemos el campo eléctrico debido a la corona; como se mencionó antes la corona se puede ver como compuesta de una serie de anillos cargados y

cada uno de estos producirá un campo de tal manera que el campo de la corana es la superposición (suma) de los campos de que producirá cada anillo. Ahora bien, dado que en el problema anterior se calculó el campo debido un anillo cargado, por lo tanto, utilizaremos este resultado. Se debe tener en cuenta que ahora la cantidad de carga que tiene el anillo es *dQ;* por lo tanto, el campo eléctrico que produce el anillo es un *dE*, entonces

$$dE_{x-anillo} = k_e \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} dQ_{anillo}$$

$$E_{x-corona} = \int dE_{x-anillo} = \int_{R_1}^{R_2} k_e \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} dQ_{anillo}$$

$$dQ_{anillo} = \sigma * 2\pi R * dR$$

$$E_{x-corona} = \int_{R_1}^{R_2} k_e \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \sigma * 2\pi R * dR$$

$$E_{x-corona} = 2\pi\sigma x k_e \int_{R_1}^{R_2} \frac{R}{(R^2 + x^2)^{3/2}} dR$$

Esta integral se puede solucionar realizando la sustitución $U = R^2 + x^2$, entonces se tiene: $dU = 2RdR$. Realizando la anterior sustitución en integral e integrando se tiene:

$$E_{x-corona} = \pi\sigma x k_e \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{(U)^{3/2}} dU = \pi\sigma x k_e \left[\frac{-2}{U^{1/2}}\right]_{R_1}^{R_2}$$

$$E_{x-corona} = \pi\sigma x k_e \left[\frac{-2}{(R^2 + x^2)^{1/2}}\right]_{R_1}^{R_2}$$

$$E_{x-corona} = -2\pi\sigma x k_e \left[\frac{1}{(R_2^2 + x^2)^{1/2}} - \frac{1}{(R_1^2 + x^2)^{1/2}}\right]$$

$$\boldsymbol{E_{x-corona} = 2\pi\sigma x k_e \left[\frac{1}{(R_1^2 + x^2)^{1/2}} - \frac{1}{(R_2^2 + x^2)^{1/2}}\right]}$$

La anterior expresión es el valor del campo para la corona. Ahora bien, si se toma $x = 0$, se obtiene el campo en el centro de la corona, y este valor es igual a *cero*, lo cual está de acuerdo con nuestra intuición; dada la simetría de la corona y además concuerda con el campo del anillo en el centro de este, valor que fue obtenido en el problema anterior. Por otro lado, si se toma $R_1 = 0$ se tiene el campo de un disco de radio R:

$$E_{x-Disco} = 2\pi\sigma x k_e \left[\frac{1}{(0+x^2)^{1/2}} - \frac{1}{(R_2^2+x^2)^{1/2}}\right]$$

$$E_{x-Disco} = 2\pi\sigma x k_e \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]$$

$$\boldsymbol{E_{x-Disco} = 2\pi\sigma k_e \left[1 - \frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}}\right]}$$

A partir de este resultado se puede obtener el campo eléctrico debido a un plano infinito uniformemente cargado. Para obtener este campo se toma $R \gg x$, haciendo esto el segundo término del paréntesis será cero, dando como resultado

$$\boldsymbol{E_{x-Plano} = 2\pi\sigma k_e = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}}$$

Donde se ha reemplazado k_e, por su valor original. Tal como se puede observar en esta expresión el campo no depende de la distancia a la cual nos encontramos del plano, lo cual significa que el campo es uniforme, es decir, tiene la misma dirección y magnitud en cualquier punto donde nos ubiquemos.

LEY DE GAUSS

La *Ley de Coulomb*, nos permite calcular el campo eléctrico de una distribución arbitraria de carga, pero hay momentos en que realizar los cálculos resulta ser un poco complicado puesto que las integrales resultantes tienen su grado de dificultad, dado que son de carácter vectorial, además en algunas ocasiones no es posible solucionarlas por métodos analíticos. El matemático y astrónomo alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855) desarrollo una ecuación donde relaciona el campo eléctrico con la carga que lo produce, la cual se conoce con el nombre de *ley de Gauss* (Bauer & Westfall, 2011). Esta ley es básicamente una generalización de la ley de Coulomb, con la ventaja de poseer una gran belleza, simplicidad y *elegancia*. Esta ley es una de las cuatro famosas ecuaciones de Maxwell, donde se resume todo el electromagnetismo clásico.

Para poder establecer la de Gauss primero se debe definir el concepto de flujo eléctrico. El concepto de flujo lo tomaron *prestado* los físicos de los ingenieros, quienes ya utilizaban este concepto en el estudio de los fluidos en movimiento. En matemáticas se define el flujo Φ de un campo vectorial **V** a través de una superficie **S** arbitraria como (Purcell, Varberg, & Rigdon, 2007)

$$\Phi = \int_S \vec{V} \cdot \hat{n} dA$$

De donde $\hat{n}$ es un vector unitario normal en todo punto a la superficie de integración y dA es un elemento local de área. Por comodidad la inmensa mayoría de textos escriben esta ecuación como

$$\Phi = \int_S \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

En el caso de que el campo vectorial sea el campo eléctrico se tiene.

$$\boldsymbol{\Phi} = \int_{s} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{A}}$$

En la figura 38 se ilustra el vector campo y el elemento de área, así como la superficie a través de la cual se quiere calcular el flujo

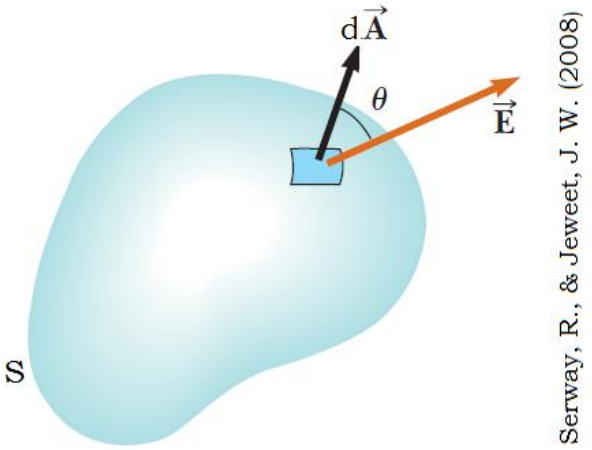


Figura 38. Flujo de campo eléctrico a través de una superficie arbitraria S.

Hasta ahora se ha definido desde el punto de vista matemático el flujo, ¿pero en realidad desde el punto de vista físico que es lo que significa? Básicamente se puede decir que el flujo lo que mide es el número de líneas que atraviesan una superficie determinada.

En el caso en que la superficie a través de la cual se desea calcular el flujo sea un plano y este en una región donde el campo sea uniforme (el que sea uniforme significa que el campo tiene el mismo valor y dirección en todo punto). El flujo esta dado por

$$\boldsymbol{\Phi} = \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{EA}\cos\boldsymbol{\theta}$$

De donde θ es el ángulo entre la superficie y el campo eléctrico (definición del producto punto). La figura ilustra la situación

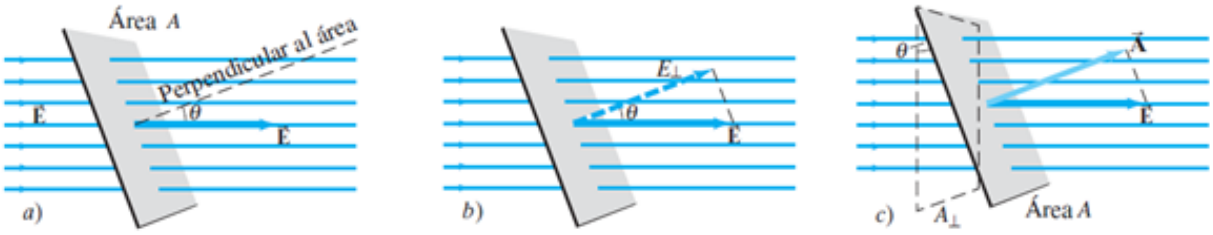


Figura tomada de Giancoli, D. C. (2008)

Figura 39. a) Un campo eléctrico uniforme $\vec{\boldsymbol{E}}$ pasa a través de un área A. b) $E_{\perp} = Ecos\theta$ es la componente de $\vec{\boldsymbol{E}}$ perpendicular al plano del área A. c) $A_{\perp} = Acos\theta$ es la proyección (indicada con líneas punteadas) del área A perpendicular al campo $\vec{\boldsymbol{E}}$

Ahora bien, dado que el flujo lo que mide es el número de líneas de campo que atraviesan una superficie, para el caso del campo eléctrico quienes generan o las fuentes de las líneas son las cargas, por lo tanto, el número de líneas en determinada región del espacio es directamente proporcional a la carga que genera el campo, y la densidad de líneas nos indica que tan intenso es el campo eléctrico en dicha región.

Si la superficie sobre la cual se desea calcular el flujo es una superficie cerrada se tiene que la expresión para el flujo es

$$\boldsymbol{\Phi} = \oint_{\boldsymbol{S}} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{A}}$$

Con lo anterior ya estamos listos para introducir la expresión para la ley de Gauss del campo eléctrico, esta establece que *el flujo de campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada* **S**, *es igual a la carga encerrada por la superficie dividida por la permitividad eléctrica* (Raimond A. Serway - John W. Jewett, 2009). Esto expresado en una ecuación es:

$$\Phi = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Esta ecuación nos plantea que el flujo solo depende de la carga encerrada por la superficie, aquellas cargas que están por fuera de la superficie no contribuyen al flujo.

La anterior ecuación también se conoce como forma integral de la ley de Gauss. También se tiene la forma diferencial de la ley de Gauss (KREYSZIG, 2011)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

o

$$Div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ambas ecuaciones de leen como*: la divergencia de E es igual a la densidad volumétrica de carga dividida por permitividad eléctrica*, y tal como se menciono es la forma diferencial de la ley de Gauss. Esta ecuación lo que verdaderamente indica es que las líneas de campo tienen un principio (origen) y un final y este es en las cargas, lo que no sucede con la ley de Gauss para el campo magnético, pues las líneas de campo magnético forman lazos cerrados.

La ley de Gauss es una herramienta muy poderosa al momento de calcular campos eléctricos en aquellas situaciones donde la distribución de carga es altamente simétrica (esferas y cilindros, básicamente).

El objetivo de este documento es ilustrar algunas situaciones donde se calcula el flujo eléctrico y la aplicación de la ley de Gauss para el cálculo de campos eléctricos para distribuciones de carga simétricas.

PROBLEMAS RESUELTOS LEY DE GAUSS

1. Para poder calcular el campo eléctrico creado por una distribución de carga conocida usando la ley de Gauss, ¿cuál de las siguientes afirmaciones *debe* ser verdadera? (Westfall, 2011)
   a) La distribución de carga debe estar en un medio no conductor.
   b) La distribución de carga debe estar en un medio conductor.
   c) La distribución de carga debe tener simetría esférica o cilíndrica.
   d) La distribución de carga debe ser uniforme.
   e) La distribución de carga debe tener un alto grado de simetría que permita establecer hipótesis sobre la simetría de su campo eléctrico.

   Solución: La ley de Gauss establece que el flujo de campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada ***s,*** es directamente proporcional a la carga encerrada por la superficie *Gaussiana*, esto escrito en una ecuación es:

$$\oint_s \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

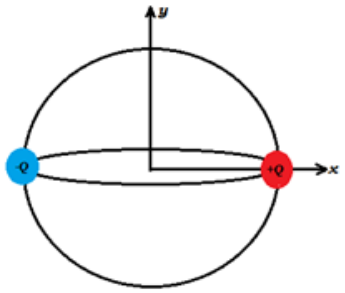
Para utilizar la ley de Gauss para calcular campos eléctricos se debe ser capaz de encontrar una superficie que encierre la carga y que en cualquier punto de esta el campo tenga en mismo valor, es decir sea constante; esto con el fin de poder *"sacar"* el campo de la integral. Desafortunadamente este requisito solo lo se cumple en el caso de distribuciones de carga altamente simétricas, tales como: cargas puntuales, esferas y cilindros entre otros. Lo cual quiere decir que ***la respuesta correcta es la opción e***.

2. Una carga puntual, +Q, se coloca sobre el eje x en x = a, y una segunda carga puntual, –Q, se coloca en el eje x en x = –a. Una superficie gaussiana con

radio r = 2a está centrada en el origen. El flujo a través de la superficie es (Westfall, 2011):

a) Cero
b) Mayor que cero
c) Menor que cero
d) Ninguna de las anteriores

Solución: La situación se ilustra en la figura 40.



Autoria propia

Figura 40.

La ley de Gauss establece que el flujo de campo eléctrico es directamente proporcional a la carga neta encerrada por la superficie. En este la carga neta dentro de la esfera es igual a cero, por lo tanto, el flujo será cero. Alguien podría argüir que las cargas están sobre la superficie, en este caso el resultado sigue siendo el mismo pues no haya encerrada. Con lo anterior se tiene que ***la respuesta correcta es la opción a***.

3. Una carga de $+2q$ se coloca en el centro de una corteza conductora sin carga. ¿Cuáles serán las cargas sobre las superficies interior y exterior de la corteza, respectivamente? (Westfall, 2011)

a) $-2q, +2q$
b) $-q, +q$
c) $-2q, -2q$

d) $-2q$, $+4q$

Solución: La situación se ilustra en la figura 41. La situación física es la siguiente: La carga puntual ubicada en el centro del cascaron crea un campo eléctrico que afecta las cargas libres del conductor (los electrones), estos son atraídos hacia la cara interior del conductor, este movimiento de cargas ocurre hasta que el conductor alcanza el equilibrio electrostático (hasta que el campo eléctrico al interior del conductor es cero). Este fenómeno se conoce como polarización.

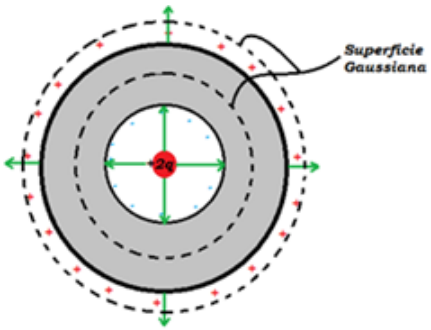


Figura 41. Autoría propia

Como se menciono arriba el conductor se polariza, apareciendo una carga en la superficie interior del conductor al igual que en la superficie exterior de este. La carga que aparece en la superficie interior del conductor siempre va a ser de signo contrario al de la carga que se coloque en el centro.

Ahora bien, aplicaremos la ley de Gauss para hallar cuanta carga se depositó en la superficie interior del conductor, para ello trazaremos una superficie gaussiana al interior del conductor, tal como se ilustra en la figura

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Como ya se mencionó el campo al interior del conductor es cero, por lo tanto, el resultado de esta integral es cero, lo que significa que la carga encerrada por la superficie gaussiana en cero. La superficie gaussiana está encerrando la carga puntual (+2q) y la carga que se deposita en la superficie interior del conductor, esto es

$$Q_{enc} = +2q + Q_{interior} = 0$$

Quedando que la carga en la superficie interior del conductor es

$$\boldsymbol{Q_{interior} = -2q}$$

Para hallar la cantidad de carga con la que queda la superficie exterior del conductor se podría aplicar de nuevo la ley de Gauss y trazar una superficie gaussiana por fuera del conductor, tal como se muestra en la figura, pero en lugar de esto utilizaremos un método más simple, se usará el principio de conservación de la carga, que es más intuitivo. De la información que nos suministra el problema dice que el cascaron este descargado, lo que realmente significa esto es que el cascaron conductor tiene una carga neta cero, es decir, que tiene igual cantidad de carga positiva como negativa, por lo tanto, para que la carga neta sea cero se tiene que sobre la superficie exterior se debe depositar una cantidad de carga **+2q**. De lo anterior se concluye que la respuesta ***correcta es la opción a***.

4. El flujo eléctrico a través de una superficie gaussiana esférica de radio R con centro en una carga Q es 1200 N/C m^2). ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una superficie gaussiana cúbica de lado R con centro en la misma carga Q? (Westfall, 2011)
   a) Menor que 1200 N/(Cm^2)
   b) Mayor que 1200 N/(Cm^2)
   c) Igual a 1200 N/(Cm^2)
   d) No es posible determinarlo a partir de la información proporcionada.

Solución: La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada depende únicamente de la carga encerrada por esta. Por lo tanto, el flujo a través del cubo es el mismo que el que pasa a través de la esfera. Otra forma de ver esto es recurrir a la definición del flujo. El flujo lo que mide es número de líneas que pasan por una superficie, y este número de líneas solo depende de la carga, por lo que aquí como la carga no cambia se tiene que el flujo es igual sobre todas las superficies que contengan a la carga. De lo anterior se desprende que ***la respuesta correcta es la opción c***.

5. Una sola carga puntal positiva, q, está en un vértice de un cubo cuyas aristas miden L de longitud, como muestra la figura. El flujo eléctrico neto a través de tres caras adyacentes es cero. El flujo eléctrico neto a través de cada una de las otras tres caras es (Westfall, 2011)

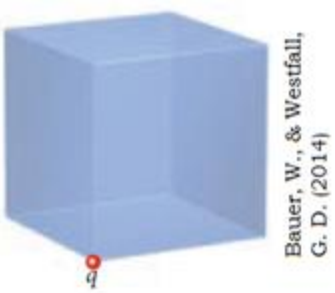


Figura 42

a) $q/3\varepsilon_0$.
b) $q/6\varepsilon_0$.
c) $q/24\varepsilon_0$.
d) $q/8\varepsilon_0$.

Solución: Si se utiliza un sistema cartesiano de unidades el espacio estará cubierto por ocho octantes (cubos), uno de estos se ilustra en la figura. Por lo tanto, el flujo total debido a una pequeña carga ubicada en el origen se divide entre ocho para uno de los octantes esto

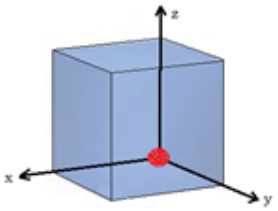


Figura 43. Autoria propia

$$\Phi = \frac{q}{8\epsilon_0}$$

Si se quiere hallar el flujo sobre una cara lo lógico sería dividir entre 6 que son el número de caras del octante, pero no es así, se debe caer en al cuenta que las caras adyacentes a la carga no contribuyen al flujo pues las líneas de campo son paralelas a estas caras, solo hay flujo sobre las caras no adyacentes, lo que significa que el flujo sobre una cara, es el flujo a través del octante dividido tres, que son el número de caras no adyacentes, esto da

$$\boldsymbol{\Phi = \frac{q}{24\epsilon_0}}$$

Por lo tanto, ***la respuesta correcta es la opción c***.

6. ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? (Westfall, 2011)

a) No hay ningún cambio en la carga dentro de la superficie interna de una esfera conductora hueca si en la superficie externa se coloca más carga.
b) Hay algún cambio en la carga sobre la superficie interna de una esfera conductora hueca si en la superficie externa se coloca más carga.
c) No hay ningún cambio en la carga sobre la superficie interna de una esfera conductora hueca si en el centro de la esfera se coloca más carga.
d) Hay algún cambio en la carga sobre la superficie interna de una esfera conductora hueca si en el centro de la esfera se coloca más carga.

Solución: Se analizará opción por opción

(a) Cuando se deposita carga sobre un conductor el exceso de carga se ubica en la superficie exterior de este, pues si se ubicase y/o se distribuye en si interior o en su volumen habría campo eléctrico en su interior lo cual es una contradicción clara al hecho experimental que dentro de un conductor en equilibrio electrostático el campo eléctrico debe ser cero. Por lo tanto, esta opción es ***verdadera***.

(b) Esta opción contradice lo explicado en la opción (a), por lo tanto, es ***falsa***.

(c) Cuando se coloca una carga en el centro de una esfera conductora hueca esta carga polariza a la esfera conductora, provocando cambios tanto en la distribución de carga en la superficie interna como en la superficie externa. Lo anterior hace que esta opción sea ***falsa***.

(d) Esta opción es ***verdadera*** y su justificación está en la opción (c).

7. Considere un conductor esférico hueco con una carga total +5e. Los radios interior y exterior son a y b, respectivamente. a) Calcule la carga sobre las superficies interna y externa si una carga de –3e se coloca en el centro de la esfera. b) ¿Cuál es la carga total neta de la esfera? (Westfall, 2011)

Solución: Debido a la presencia de la carga -3q en el centro de la esfera hueca, ocurre una redistribución de la carga en esta. La esfera se *polariza* para que el campo eléctrico en su interior sea cero. La carga *empuja* a los electrones libres del conductor hacia la superficie exterior creando un déficit en de estos en la superficie interior (figura 44), es decir, en la superficie interior aparece una carga positiva a fin de que el campo eléctrico en el interior del cascaron sea cero. Si se traza una superficie gaussiana el interior del conductor y se aplica la ley de Gauss se tiene

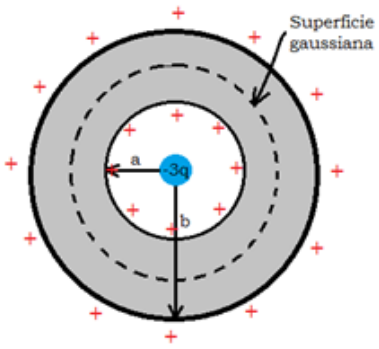


Figura 44. Autoría propia

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

Dado que el campo eléctrico es cero como ya se mencionó, se tiene entonces que la carga neta encerrada por la superficie gaussiana debe ser cero

$$Q_{enc} = 0 = -3q + Q_{interior}$$

Despejando de tiene

$$\boldsymbol{Q_{interior} = +3q}$$

Ahora se puede aplicar el principio de conservación de la carga, la carga total que tenía la esfera no se ve modificada simplemente ocurrió una redistribución de esta, la carga total de la esfera sigue siendo +5q, esta carga total se distribuye en las paredes de las superficies interna y externa del conductor, es decir

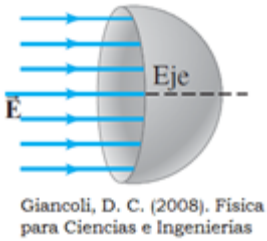
$$+5q = Q_{interior} + Q_{extrna}$$

Reemplazando el valor de la carga en la superficie interior se tiene

$$+5q = 3q + Q_{extrna}$$

$$\boldsymbol{Q_{externa} = +2q}$$

8. Un campo eléctrico $\vec{E}$ es paralelo al eje de un hemisferio hueco de radio r (figura 45) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie hemisférica? b) ¿Cuál es el resultado si ahora $\vec{E}$ es perpendicular al eje? (Giancoli, 2008)



Giancoli, D. C. (2008). Física para Ciencias e Ingenierías

Figura 45.

Solución: Por definición el flujo lo que mide es el número de líneas de campo que pasan o atraviesan una superficie determinada y la expresión matemática que nos da este resultado es

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, ds$$

Calcular esta integral sobre la superficie del hemisferio resulta un tanto engorroso e inoficioso, puesto que la normal a la superficie estaría cambiando de dirección de un punto a otro sobre esta, lo mejor es recurrir a la definición, es decir tener en cuenta que el flujo nos da el número de líneas que atraviesan una superficie, en este caso se tiene que el hemisferio se encuentra en una región donde el campo eléctrico es uniforme, es decir, el campo eléctrico tiene la misma magnitud y dirección en cada punto del espacio, esto es las líneas de campo no cambian de dirección de un punto a otro y la densidad de líneas es la misma. Lo que significa que, si considerásemos que el hemisferio tuviese una *tapa*, esta sería un círculo y las líneas que lo atraviesan son las mismas que pasan atreves del hemisferio (ver figura), por lo tanto, el flujo a través del circulo es el mismo que a través del hemisferio, el cálculo de la integral ahora es mucho más fácil dado que sobre la tapa el campo eléctrico es constante como ya se mencionó la normal no cambia de dirección, es única.

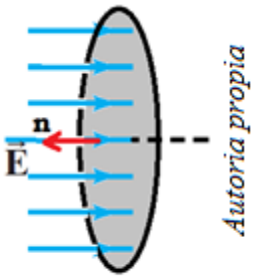


Figura 46.

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, ds = \int_S E.\cos 180 dS$$

$$\boldsymbol{\Phi = -\mathrm{E}\int_S dS = -\pi r^2 E}$$

Hay que tener en cuenta que el flujo sobre la tapa es un flujo entrante, de ahí que sea negativo, mientras que sobre el hemisferio es saliente, por lo tanto, el flujo sobre el hemisferio es

$$\boldsymbol{\Phi = \pi r^2 E}$$

9. Una carga puntual Q está localizada sobre el eje de un disco de radio R a una distancia b del plano del disco. Demuestre que en el caso de que una cuarta parte del flujo eléctrico de la carga pasara a través del disco, R sería igual a $\sqrt{3}b$ (Serway & Jewett, Jr, 2008).

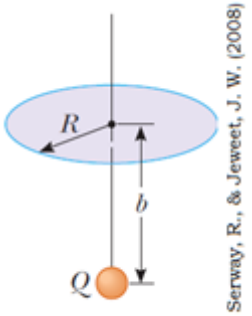


Figura 47.

Solución: Si se traza una esfera de radio ***r*** centrada en la carga tal como se ilustra en la figura 48, el flujo eléctrico a través de esta seria $\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$.

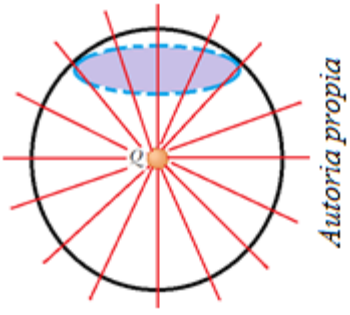


Figura 48.

Ahora bien, si se traza el disco de radio ***R*** a una distancia ***b*** de la carga, solo algunas líneas lo atravesaran es decir solo parte del flujo total pasara por el disco, para este caso solo la cuarta parte, es decir, $\Phi = \frac{Q}{4\epsilon_0}$.

Ahora procederemos a calcular el flujo a través del disco, para ello se tomará una pequeña área dS, tal como se ilustra en la figura.

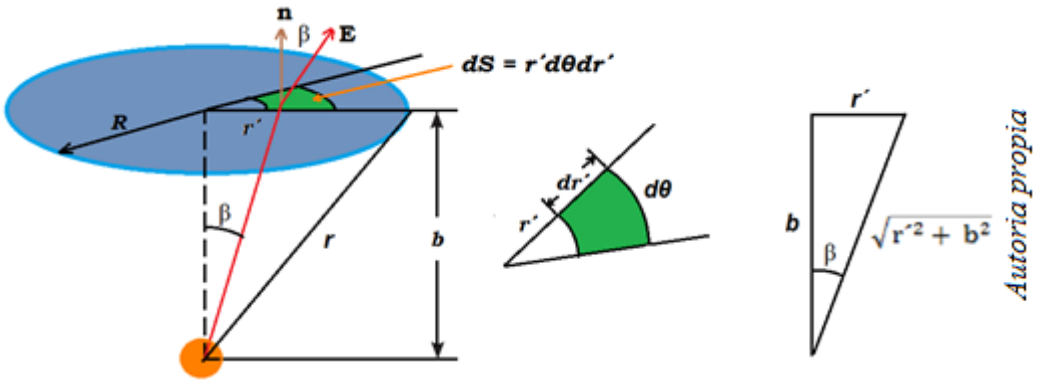


Figura 49.

En la figura 49 se puede observar la normal al disco, dado que el disco está ubicado sobre un plano la dirección de esta nunca va a cambia, lo que si cambiara es la dirección del campo sobre el disco puesto que el campo va en dirección radial. En la figura se ilustran el campo y la normal sobre una pequeña área ***dS***, estos forman un ángulo β. Dado que la pequeña área es una corona circular su área está dada por

$$\boldsymbol{dS = r´d\theta dr´}$$

el flujo sobre esta pequeña es

$$\boldsymbol{d\Phi = \vec{E} \cdot \hat{n} dS}$$

Por la definición del producto punto se tiene

$$d\Phi = E \cos\beta \, . r´d\theta . dr´$$

El campo eléctrico de la carga puntual sobre la corona es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\left(\sqrt{r'^2 + b^2}\right)^2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{(r'^2 + b^2)}$$

Reemplazando en la expresión para el flujo se tiene

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{(r'^2 + b^2)}\cos\beta\,.\,r'd\theta.dr$$

integrando se tiene

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{Q}{(r'^2 + b^2)}\cos\beta\,.\,r'd\theta.dr$$

Realizaremos primero la integral respecto a θ, pues es independiente de r'.

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,2\pi\int_0^R\frac{1}{(r'^2 + b^2)}\cos\beta\,.\,r'dr'$$

$$\Phi = \frac{Q}{2\epsilon_0}\int_0^R\frac{1}{(r'^2 + b^2)}\cos\beta\,.\,r'dr'$$

De la figura se tiene que

$$\tan\beta = \frac{r'}{b}$$

$$r' = b\tan\beta$$

$$dr' = bsec^2\beta.d\beta$$

En este momento debemos cambiar los límites de integración, teniendo en cuenta que cuando se está justo sobre el centro del disco el ángulo entre la normal y el campo es cero, pues los dos son normales en este punto al disco, pero cuando se está sobre el borde del disco este ángulo cambia a γ

$$\Phi = \frac{Q}{2\epsilon_0}\int_0^{\gamma}\frac{b^2 * \tan\beta * \cos\beta}{b^2\left(1 + {r'^2}/{b^2}\right)}sec^2\beta.d\beta$$

$$\Phi = \frac{Q}{2\epsilon_0}\int_0^{\gamma}\frac{\tan\beta * \cos\beta}{(1 + tan^2\beta)}sec^2\beta.d\beta$$

De donde

$$sec^2\beta = 1 + tan^2\beta$$

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

Reemplazando en la integral se tiene

$$\Phi = \frac{Q}{2\epsilon_0}\int_0^{\gamma}\frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta} * \cos\beta}{(sec^2\beta)}sec^2\beta.d\beta$$

Simplificando se tiene

$$\Phi = \frac{Q}{2\epsilon_0}\int_0^{\gamma}\sin\beta.d\beta$$

$$\Phi = \frac{Q}{2\epsilon_0}[-\cos\beta]_0^{\gamma}$$

$$\Phi = \frac{Q}{2\epsilon_0}[-\cos\gamma + \cos 0]$$

De la figura

$$cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}}$$

Sustituyendo

$$\boldsymbol{\Phi = \frac{Q}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}}\right]}$$

Este es el flujo sobre el disco, pero este flujo es igual a $\Phi = \frac{Q}{4\epsilon_0}$, entonces se tiene

$$\frac{Q}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{b}{(R^2 + b^2)^{1/2}}\right] = \frac{Q}{4\epsilon_0}$$

$$\left[-\frac{b}{(R^2 + b^2)^{1/2}} + 1\right] = \frac{1}{2}$$

$$\frac{b}{(R^2 + b^2)^{1/2}} = \frac{1}{2}$$

Elevando al cuadrado en ambos lados se tiene

$$\frac{b^2}{R^2 + b^2} = \frac{1}{4}$$

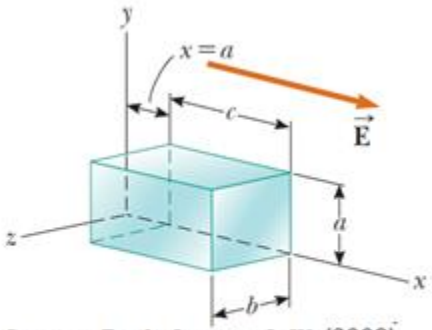
$$4b^2 = (R^2 + b^2)$$

$$3b^2 = R^2$$

$$\boldsymbol{R = \sqrt{3}b}$$

Que era lo que queríamos demostrar

10. Una superficie cerrada de dimensiones a = b = 0.400 m y c = 0.600 m está colocada como se observa en la figura. La arista izquierda de la superficie cerrada está ubicada en la posición x = a. El campo eléctrico en toda la región no es uniforme y se conoce por $\vec{E} = (3.0 + 2.0x^2)\hat{\imath}\ {}^{N}/_{C}$, donde x está expresado en metros. Calcule el flujo eléctrico neto que sale de la superficie cerrada. ¿Cuál es la carga neta que se encuentra dentro de la superficie? (Serway & Jewett, Jr, 2008)



Serway, R., & Jeweet, J. W. (2009)

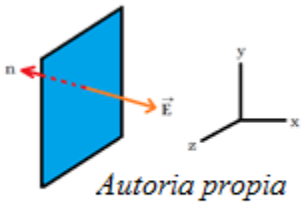
Figura 50.

Solución: Para dar solución a este problema procederemos a hallar el flujo a través de cada una de las caras y al final se sumarán estos flujos para así dar el flujo total a través de toda la caja.

Primero se hallará el flujo sobre la cara lateral izquierda, esta cara está ubicada en x = a, por lo que el campo sobre ella es

$$\vec{E} = (3.0 + 2.0a^2)\hat{\imath}\ {}^{N}/_{C}$$

Lo que quiere decir que sobre esta cara el campo es uniforme, pues en cualquier punto de ella el campo tiene el mismo valor. En la figura se ilustran tanto el campo como la normal a esta cara. Tal como se observa en la figura la normal y el campo son antiparalelos.



Autoria propia

Figura 51.

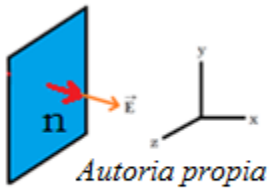
Aplicando la definición del flujo

$$\Phi = \vec{E} \cdot \hat{n}S$$

$$\Phi = (3.0 + 2.0a^2)\hat{\imath} \cdot (-\hat{\imath})ab$$

$$\boldsymbol{\Phi_{lateral-iquierda} = -(3.0 + 2.0a^2)ab}$$

Para la cara lateral derecha se procede de igual manera, pero ahora la ubicación esta es en x = a + c, por lo que el campo sobre ella es



Autoria propia

Figura 52.

$$\vec{E} = (3.0 + 2.0[a+c]^2)\hat{\imath}\ {}^{N}/_{C}$$

En la figura se ilustra la dirección del campo y la normal sobre esta cara, tal como se puede observar el campo y la normal son van en la misma dirección, es decir, son paralelos, entonces el flujo es

$$\Phi_{lateral-derecha} = (3.0 + 2.0[a+c]^2)\hat{\imath} \cdot \hat{n}\,(ab)$$

$$\Phi_{lateral-derecha} = \boldsymbol{(3.0 + 2.0[a+c]^2)(ab)}$$

Sobre las demás caras no hay flujo puesto que el campo y la normal son perpendiculares, tal como se ilustra en la figura 53

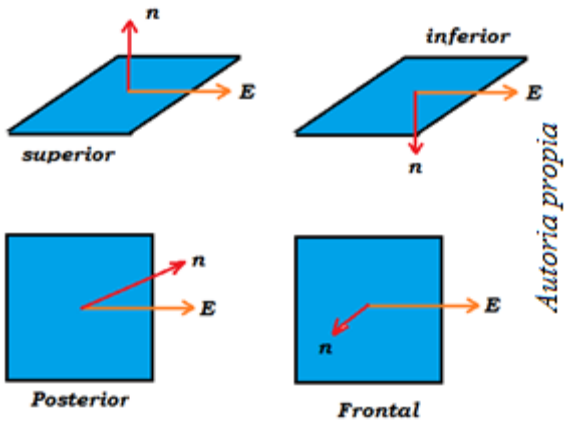


Figura 53.

De acuerdo con lo anterior se tiene que el flujo es solo sobre las caras laterales, por lo tanto, el flujo total es

$$\Phi_{total} = \Phi_{lateral-\,izquierda} + \Phi_{lateral-derecha}$$

$$\Phi_{total} = -(3.0 + 2.0a^2)ab + (3.0 + 2.0[a+c]^2)(ab)$$

Destruyendo los paréntesis y sumando los términos semejantes se tiene que el flujo total a través de la caja es

$$\boldsymbol{\Phi_{total} = 2abc(2a + c)}$$

Ahora bien, por ley de Gauss se tiene que el flujo de campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada S es

$$\boldsymbol{\Phi = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}}$$

Igualando las dos últimas expresiones se tiene

$$\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = 2abc(2a + c)$$

Por lo que la carga encerrada por la caja es

$$\mathbf{Q_{enc}} = \mathbf{2abc(2a + c)\epsilon_0}$$

EL POTENCIAL ELECTRICO

Dado que el campo eléctrico se concibe como una deformación del espacio tiempo por la carga eléctrica. Una "representación" grafica de esto fue ideada por Einstein para explicar la gravitación, si modificamos dicha representación para el caso del campo eléctrico con ciertos condicionamientos (guardando las proporciones), podemos considerar el espacio tiempo como una gran sabana tensa de tal manera que cuando se coloque una carga sobre esta la va a deformar, esta deformación es debido a la carga, más no a la masa. Esta deformación producida sobre la sabana (espacio tiempo) es proporcional a la cantidad de carga y la forma de la deformación dependerá de del signo de la carga y de la distribución geométrica de la misma. De acuerdo con lo anterior es lógico pensar que el espacio "posee ciertas propiedades mecánicas" las cuales no serán objeto de discusión aquí, pero de nuestra experiencia tenemos que para "deformar" algo se necesita realizar un trabajo (un gasto de energía), energía que se almacena en lo deformado en forma de energía potencial. En conclusión, se tiene que el espacio está "lleno" de energía debido a las cargas en el inmersas. A esta *energía por unidad de carga la llamaremos potencial eléctrico*. Es decir, a cada punto del espacio "vecino" donde haya una carga presente la corresponderá un valor de potencial eléctrico.

El potencial eléctrico (Figura 38) debido a una carga puntual a una distancia r de esta está dado por

$$V = k_e \frac{Q}{r}$$

Por su definición el potencial eléctrico es un escalar. Las unidades del potencial eléctrico son los *volts* (V), unidad en honor al físico y químico italiano, Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta (1745 – 1827).

Dada la definición de potencial eléctrico se tiene que cuando se coloca una carga Q_2 en las inmediaciones de una carga Q_1 en este sistema de cargas va a tener una almacenada una energía potencial eléctrica dada por

Figura 54. Autoría propia

$$U = Q_2 V_1$$

De donde V_1 es el potencial eléctrico en el lugar donde esta Q_2, debido Q_1. Ahora bien, si la partícula Q_2 cambia de posición entonces la energía de la disposición cambia (figura 55), esto es

$$\Delta U = U_f - U_f$$

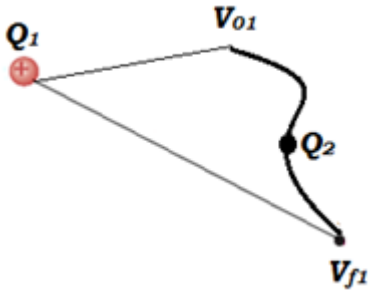


Figura 55. Autoría propia

Por definición se tiene

$$\Delta U = Q_2 V_{f1} - Q_2 V_{01}$$

$$\Delta U = Q_2 (V_{f1} - V_{01})$$

$$\Delta U = Q_2 \Delta V_{f-0}$$

$$\Delta V_{f-0} = \frac{\Delta U}{Q_2}$$

Se podría decir que para desplazar Q_2 se realiza trabajo en favor o en contra del campo eléctrico creado por Q_1. Dado que el campo eléctrico es conservativo se tiene que

$$W = -\Delta U$$

Por otro lado, de la definición de trabajo

$$W = F\,\Delta S$$

$$W = Q_2 E\,\Delta S$$

De donde ΔS es el desplazamiento que ha sufrido Q_2.

Reemplazando en la expresión para la diferencia de potencial se tiene

$$\Delta V_{f-0} = -E\,\Delta S$$

Si el desplazamiento es pequeño, entonces la diferencia o variación del potencial entre un punto y otro es por lo tanto muy pequeña, lo que puede escribirse como

$$dV = -EdS$$

Ahora bien, si se va de un punto *A* hasta un punto *B*, realizando múltiples desplazamientos sucesivos entonces la diferencia de potencial entre el punto final *B* y el punto inicial *A* es

$$V_{AB} = \int dV$$

$$V_{AB} = -\int_{l} EdS$$

De donde *l* es la trayectoria sobre la cual se realiza la integración y es la seguida para ir de *A* hasta *B*.

La forma correcta de la anterior expresión es

$$\boldsymbol{V_{AB} = -\int_{l} \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

Esta expresión es la que nos va a servir para obtener la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera del espacio donde exista un campo eléctrico.

Como nota aclaratoria diremos que cuando se mide el potencial en un punto determinado se dirá que el potencial en dicho punto es de 5 Volts, por ejemplo. Pero cuando se mide la diferencia de potencial entre dos puntos diremos que el *voltaje* entre esos dos puntos es de 5 Volts.

PROBLEMAS RESUELTOS DE POTENCIAL ELECTRICO

1. Una carga positiva se libera y se mueve a lo largo de una línea de campo eléctrico. Esta carga se mueve hacia una posición de: (Bauer & Westfall, 2011)

a) Menor potencial y menor energía potencial.
b) Menor potencial y mayor energía potencial.
c) Mayor potencial y menor energía potencial.
d) Mayor potencial y mayor energía potencial.

Solución: A medida que la partícula se mueve va ganando energía cinética, por lo tanto, por la conservación de la energía pierde energía potencial, dicho de otra manera: $\Delta K = -\Delta U_p > 0$

Dado que $q\Delta V = -\Delta U_p > 0$, entonces $q\Delta V = -\Delta U_p > 0$, dado que $\boldsymbol{q}$ es positiva $(q > 0)$, entonces $\Delta V < 0$. Lo cual nos lleva a que $V_f < V_0$. Lo que se interpreta como que la partícula se mueve hacia regiones de menor potencial y menor energía potencial. La ***respuesta es A.***

2. Un protón se coloca a la mitad de la distancia entre los puntos A y B. El potencial en el punto A es –20 V, y el potencial en el punto B es +20 V. El potencial en el punto medio es 0 V. El protón (Bauer & Westfall, 2011)

a) Permanece en reposo
b) Se mueve hacia el punto B a velocidad constante.
c) Acelera hacia el punto A.
d) Acelera hacia el punto B
e) Se mueve hacia el punto A, a velocidad constante.

Solución: Del problema anterior se puede concluir que las partículas cargadas positivamente se mueven de regiones de mayor potencial hacia regiones de menor potencial, por lo tanto, el protón se moverá hacia el punto A que es el que se encuentra a menor potencial. ***Entonces la respuesta correcta es la opción C.***

3. ¿Cuál sería la consecuencia de fijar el potencial a +100 V en el infinito, ¿en lugar de tomarlo como cero ahí? (Bauer & Westfall, 2011)

a) Ninguna; el campo y el potencial tendrían los mismos valores en cualquier punto finito.
b) El potencial eléctrico se volvería infinito en todo punto finito y no podría definirse el campo eléctrico.
c) El potencial eléctrico en todas partes sería 100 V mayor y el campo eléctrico sería el mismo.
d) Depende de la situación. Por ejemplo, el potencial debido a una carga puntual positiva disminuiría más lentamente con la distancia, de modo que la magnitud del campo eléctrico sería menor.

Solución: Dado que el campo eléctrico se puede escribir como: $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, si escribimos el potencial como $V = V(r) + Cte$, donde la constante puede tomar un valor arbitrario. Es decir, lo único que hace es la contante es cambiar el valor del potencial en un punto dado en un valor contante, pero al tomar la "derivada" el valor del campo no cambia en ese punto puesto que la derivada de una constante es cero, lo anterior quiere decir que el valor de la contante es irrelevante para los cálculos, lo único que hace es elevar o disminuir el valor del potencial en punto respecto del infinito. Además, cuando se está midiendo el potencial entre dos puntos el valor de la contante es inocuo. Esto es, el potencial en un punto A seria: $V_A = V(r_B) + Cte$, y en el punto B, $V_B = V(r_B) + Cte$.

La diferencia de potencial entre A y B es: $\Delta V = V_{AB} = V_B - V_A = V(r_B) - V(r_A)$, la constante desaparece. ***La opción correcta es la C.***

4. ¿En cuál de las siguientes situaciones el campo eléctrico es máximo? (Bauer & Westfall, 2011)

a) En un punto a 1 m de la carga puntual de 1 C.
b) En un punto a 1 m del centro de una corteza esférica de radio 0.5 m con una carga total de 1 C.
c) En un punto a 1 m del centro de una barra uniformemente cargada de 1 m de longitud y una carga total de 1 C.
d) En un punto a 2 m de una carga puntual de 2 C
e) En un punto a 0.5 m de una carga puntual de 0.5 C

Solución: "Las esferas cargadas se comportan como cargas puntuales", por lo tanto, el campo eléctrico de una esfera para puntos fuera de esta es el mismo que el de una carga puntual, con toda su carga concentrada en el centro.

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{carga\ puntual-esfera} = k\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

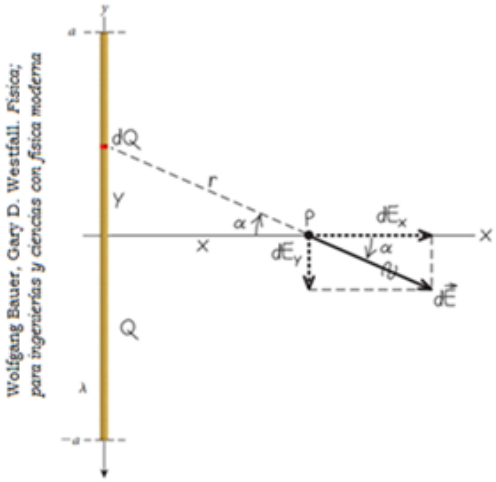


Figura 56.

Tal como se puede observar el campo de la carga puntual (esfera), es directamente proporcional a la carga e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la carga a punto donde queremos calcular el campo.

Ahora bien, la expresión que me permite obtener el campo eléctrico debido a una línea de carga de longitud $2a$, que se extiende sobre el eje y, entre $+a$ y $-a$, con

una carga eléctrica Q distribuida de manera uniforme sobre toda su longitud. Es:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = k\,\frac{2\lambda}{x\sqrt{(x/a)^2+1}}\hat{\imath} = \; k\,\frac{Q}{ax\sqrt{(x/a)^2+1}}\hat{\imath}$$

Si en la anterior expresión hacemos $x = r$, entonces se puede ver claramente el denominador de esta es menor el denominador que el de la expresión para el campo de la carga puntual; por lo tanto, el campo será mayor para la línea de carga que para la carga puntual, lo cual quiere decir que la opción ***correcta es la c***.

5. La cantidad de trabajo realizado para mover una carga puntual positiva q sobre una superficie equipotencial de 1 000 V con respecto a la de una superficie equipotencial de 10 V es (Bauer & Westfall, 2011)

a) La misma.
b) Menor.
c) Mayor.
d) Depende de la distancia que se mueve la carga.

Solución: Puesto que cuando una partícula cargada se mueve sobre una superficie equipotencial, su potencial no cambia (su energía potencial no varía), entonces no hay trabajo. Por lo tanto, el trabajo que se realiza para mover una carga sobre una superficie equipotencial es cero. Explicado de "otra" forma: (Bauer & Westfall, 2011)

$$W = \; -\Delta U_p = q * \Delta V,$$

como

$$\Delta V = 0 \; entonces \; W = 0$$

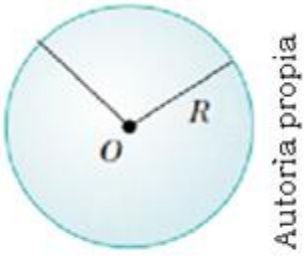
Por lo anterior la respuesta es ***la opción a***

6. Una esfera sólida conductora de radio R está centrada en el origen de un sistema de coordenadas xyz. Una carga total Q está distribuida uniformemente sobre la superficie de la esfera. Suponiendo, como de costumbre, que el potencial eléctrico es cero a una distancia infinita, ¿cuál es el potencial eléctrico en el centro de la esfera conductora? (Bauer & Westfall, 2011)
   a) Cero
   b) $^{Q}/_{\epsilon_0 R}$
   c) $^{Q}/_{2\pi\epsilon_0 R}$
   d) $^{Q}/_{4\pi\epsilon_0 R}$

Solución: Inicialmente estaríamos tentados a decir que el potencial eléctrico al interior de la esfera es cero, dado que el campo al interior de cualquier conductor en equilibrio electrostático es cero; pero esto no es así, recordemos que:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\nabla V, \qquad si \;\; \vec{\boldsymbol{E}}_{int.} = 0 \;\; entonces \; \boldsymbol{V}_{int} = cte$$

Por lo anterior el potencial al interior de la esfera es constante, es decir, es el mismo en cualquier punto al interior; incluido el centro. Procederemos ahora a calcular ese valor.



Autoria propia

Figura 57.

La esfera divide el espacio en dos regiones una es el exterior de la esfera (r > *R*) y la otra que es el interior de la esfera (r < *R*). Por lo tanto, para calcular el potencial se hace uso de:

$$\Delta V = -\int_0^{\infty} \vec{E}.d\vec{l} = -\left[\int_0^{R} \vec{E}.d\vec{l} + \int_R^{\infty} \vec{E}.d\vec{l}\right]$$

La primera integral es cero dado que como ya se dijo antes el campo eléctrico al interior de la esfera en cero. Quedando la segunda integral, esta segunda integral da el potencial sobra la superficie de la esfera, y se tiene por Ley de Gauss que una esfera se comporta como como una carga puntual, por lo tanto, el potencial de la esfera sobre su superficie es el mismo que el de una carga puntual a una distancia igual al radio de la esfera, esto es:

$$V = K\frac{q}{R}$$

Entonces se tiene que:

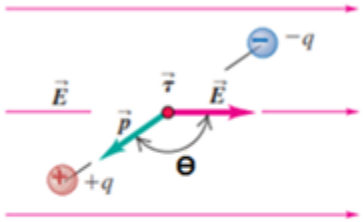
$$\Delta V = -\int_0^{\infty} \vec{E}.d\vec{l} = -\left[\int_0^{R} \vec{E}.d\vec{l} + \int_R^{\infty} \vec{E}.d\vec{l}\right] = V = K\frac{q}{R}$$

Por todo lo anterior la respuesta es ***la opción d***

7. ¿Con cuál de los siguientes ángulos entre el momento dipolar eléctrico y un campo eléctrico aplicado se obtiene el estado más estable? (Bauer & Westfall, 2011)

a) 0 rad.
b) $^{\pi}/_{2}\ rad.$
c) $\pi\ rad.$
d) El momento dipolar eléctrico no es estable en ninguna circunstancia en un campo eléctrico aplicado

Solución: En la figura 58 se observa un dipolo inmerso en una región donde existe un campo eléctrico, ahí se observan los vectores campo eléctrico, momento dipolar y toque que es perpendicular al plano de la página.



Francis W. Sears, Mark W. Zemansky, Hugh D. Young, Roger A. Freedman. *Física Universitaria con Física Moderna*

Figura 58.

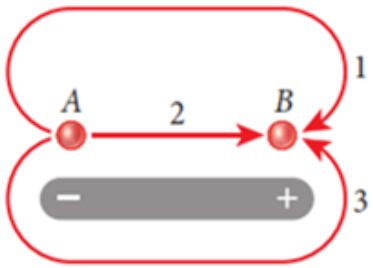
El torque sobre el dipolo inmerso en un campo eléctrico está dado por:

$$\vec{\tau} = \vec{p}\, x\, \vec{E}\ ,$$

$$\tau = pE \sin\theta$$

De lo anterior se desprende que el torque sobre el dipolo depende del ángulo entre el momento dipolar y el campo eléctrico, por lo tanto, el estado más estable de un dipolo dentro de un campo eléctrico sucede cuando estos dos vectores son paralelos o antiparalelos, es decir, cuando forman un ángulo de cero grados o 180. De lo anterior se tiene que la respuesta ***correcta es la opción a***.

8. Una carga puntual positiva debe moverse del punto A al punto B en la vecindad de un dipolo eléctrico. ¿Con cuál de las tres rutas mostradas en la figura 59 se obtiene el mayor trabajo realizado por el campo del dipolo eléctrico sobre la carga puntual? (Bauer & Westfall, 2011)



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. *Física; para ingenierías y ciencias con física moderna*

Figura 59.

a) Ruta 1
b) Ruta 2
c) Ruta 3
d) El trabajo es el mismo sobre las tres rutas

Solución: Dado que el campo eléctrico es conservativo, significa que el trabajo que realiza el campo eléctrico para mover una carga de un punto a otro no depende de la trayectoria seguida por la carga. Se tiene entonces que la ***respuesta correcta es la opción d***.

9. Cada uno de los siguientes pares de cargas está separado por una distancia d. ¿Cuál par tiene la máxima energía potencial? (Bauer & Westfall, 2011)

a) $+5\,C \;\; y + 3C$

b) $+5\,C \;\; y - 3C$

c) $-5\,C \;\; y - 3C$

d) $-5\,C \;\; y + 3C$

e) Todos los pares tienen la misma energía.

Solución: La energía potencia para un sistema de dos cargas puntuales está dada por

$$\boldsymbol{U} = \mathrm{k}\frac{Q_1 Q_2}{r}$$

La energía potencial es una cantidad escalar, por lo tanto, depende de los signos de las cargas. Entonces la energía potencial será máxima cuando las cargas poseen el mismo signo, lo cual quiere decir que las ***opciones correctas son a y c***.

10. Una partícula con carga negativa gira en dirección de las manecillas del reloj alrededor de una esfera con carga positiva. El trabajo realizado sobre la partícula con carga negativa por el campo eléctrico de la esfera es: (Bauer & Westfall, 2011)

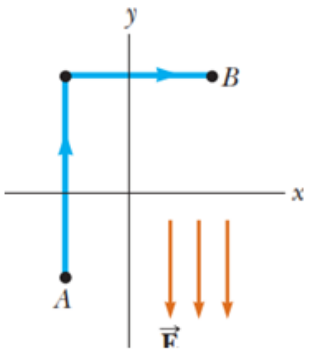
a) Positivo

b) Negativo

c) Cero

Solución: Se supone que el radio de la partícula no cambia, por lo tanto, se estará moviendo sobre una superficie equipotencial, y dado que el potencial no cambia, no se realiza trabajo sobre esta, lo que quiere decir que la ***respuesta es la opción c***.

11. En la figura60, un campo eléctrico uniforme de magnitud 325 V/m está dirigido hacia el lado negativo de las y. Las coordenadas del punto A son (-0.200, -0.300) m, y las del punto B son (0.400, 0.500) m. Calcule, utilizando la trayectoria azul, la diferencia de potencial $V_B - V_A$. (Serway & Jewett, Jr., 2019)



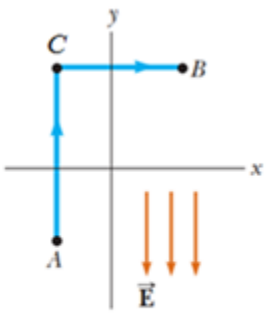
Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr;
Física para ciencia e ingeniería

Figura 60.

Solución. La diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera en una región del espacio donde existe un campo eléctrico dado está dada por la expresión:

$$V_B - V_A = \Delta V = -\int_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Esta es una integral de trayectoria o de línea, por lo tanto, el camino se puede dividir en dos o más partes y el resultado es la suma de las integrales por cada camino. Siguiendo esto Llamaremos C al punto entre A y B



Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr;
Física para ciencia e ingeniería

Figura 61

$$V_B - V_A = \Delta V = -\int_l \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = -\left[\int_A^C \vec{E}\,.\hat{\jmath}\,dy + \int_C^B \vec{E}\,.\hat{\imath}\,d\vec{l}\right]$$

Por la definición del producto punto entre dos vectores la segunda integral del paréntesis es cero puesto que el campo es perpendicular a la trayectoria BC.

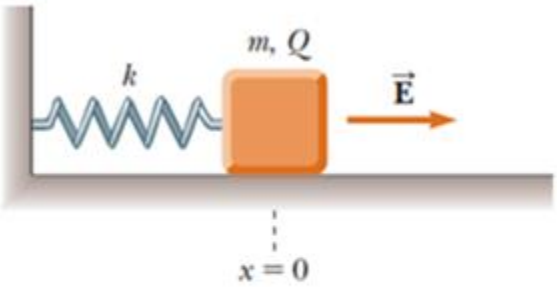
En la primera integral, el resultado del producto punto es $-E$, dado que el campo es antiparalelo a la dirección del desplazamiento; como nos estamos moviendo en una región de campo eléctrico uniforme $(E = cte)$, este sale de la integral:

$$V_B - V_A = \Delta V = -\int_l \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}} = E\int_{y_A}^{y_C} dy = E\,(y_C - y_A)$$

$$V_B - V_A = \Delta V = 325\,\frac{V}{m}\,(0.500 - \{-0.300\})\,m$$

$$V_B - V_A = \Delta V = 260\,V$$

12. ***Problema de repaso***. Un bloque de masa m y carga + Q está conectado a un resorte que tiene una constante k. El bloque se encuentra en una pista horizontal aislada libre de fricción, y el sistema está dentro de un campo eléctrico uniforme de magnitud ***E***, dirigido como se muestra en la figura. Si el bloque se libera del reposo cuando el

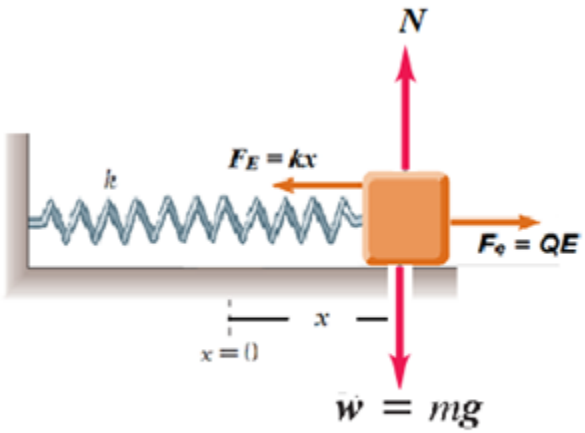


Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr;
Física para ciencia e ingeniería

Figura 62.

resorte no está estirado (en $x = 0$): a) ¿Cuál es la cantidad máxima que se estirará el resorte? b) ¿Cuál es la posición de equilibrio del bloque? c) Demuestre que el movimiento del bloque es un movimiento armónico simple, y determine su periodo. d) ¿Qué pasaría sí? Repita el inciso a), si el coeficiente de la fricción cinética entre bloque y superficie es μ_k. (Serway & Jewett, jr, 2019)

Solución. Dado que el bloque está cargado este experimentará una fuerza eléctrica, y esta ira en la dirección del campo puesto que la carga del bloque es positiva, además el bloque está atado a un resorte por lo que también experimentará una fuerza elástica, dado que por la acción del campo el resorte se alongará, la fuerza del resorte sobre el bloque va en dirección opuesta a la fuerza eléctrica.



Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr;
Física para ciencia e ingeniería

Figura 63.

Cuando la fuerza del campo iguale a la fuerza elástica el bloque se encontrará en equilibrio, esto es la fuerza neta en dirección x es cero, y esta será la *nueva* posición de equilibrio del bloque.

$$\sum F_x = 0$$

$$F_e - F_E = 0$$

$$QE - kx_{equlibrio} = 0$$

$$x_{equlibrio} = \frac{QE}{k}$$

Si el bloque se moviese una distancia x (comprimiendo o elongando el resorte) a partir de esta posición de equilibrio, ya no se encontraría en equilibrio, puesto que hay una descompensación de la fuerza neta en una cantidad igual a kx, que iría en dirección opuesta a la deformación del resorte, esto es

$$F_{neta\ en\ x} = -kx = ma_x$$

Dado que

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_{neta\ en\ x} = -kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Esta ecuación se puede escribir como:

$$-x\frac{k}{m} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, de donde $\omega^2 = {}^{k}/_{m}$,

La anterior ecuación, es la ecuación diferencial para el movimiento armónico simple para una masa sujeta a un resorte, de donde ω es la frecuencia angular del movimiento, esto es

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

De donde T es el periodo del movimiento, entonces

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ahora bien, dado que el campo es quien hala al bloque, es el campo quien realiza trabajo, este trabajo se almacena en forma de energía potencial en el resorte, por lo tanto, la máxima energía que se puede almacenar en el sistema se almacenara en forma de energía potencial en el resorte el cual se estirara al máximo. Esto es:

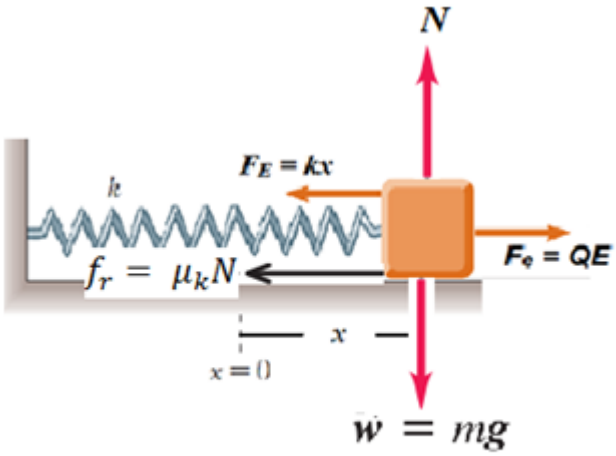
$$W_{campo} = U_{elastica}$$

$$F_{electrica}.S_{max}.\cos\theta = \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

$$Q.E.x_{max}.\cos 0 = \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

$$x_{max} = \frac{2QE}{k}$$

Si ahora existiese fricción entre la superficie y el bloque deberíamos tener en cuenta que debido a esto ahora existe una pérdida de energía debido a la fricción. La figura adjunta ilustra las fuerzas que actúan sobre al bloque.



Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr;
Física para ciencia e ingeniería

Figura 64

El teorema de la conservación de la energía para este sistema queda:

$$\Delta E = W_{fuerzas\ no\ conservativas}$$

Para nuestro caso la única fuerza no conservativa es la fricción

$$\Delta E = E_{final} - E_{Inicial} = f_{friccion} * S * Cos\ 180$$

La energía mecánica inicial la tomaremos como cero, pues será el punto de partida (referencia) para medir las variaciones de energía potencial eléctrica del sistema.

Si el bloque se mueve muy lentamente tampoco habrá variación en la energía cinética, por lo tanto, la velocidad final del bloque es cero al llegar a la posición de equilibrio. Lo anterior significa que la energía final del sistema solo será energía potencial eléctrica y elástica

$$E_{final} = U_{electrica} + U_{elastica}$$

$$E_{final} = -Q(\Delta V) + \frac{1}{2}kx^2$$

Siendo x el desplazamiento que ha tenido el bloque desde su posición inicial, de igual manera lo que se ha deformado el resorte.

Puesto que el bloque se encuentra sumergido en una región de campo eléctrico uniforme se tiene que:

$$\Delta V = E * x$$

Por definición se tiene:

$$f_{friccion} = \mu_k * N\ , \quad \text{de donde} \quad N = mg$$

$$f_{friccion} = \mu_k mg$$

Reemplazando todo en la ecuación de la conservación de la energía se tiene:

$$-Q * E * x + \frac{1}{2}kx^2 - 0 = \mu_k mg * x * (-1)$$

Simplificando se tiene:

$$-Q * E + \frac{1}{2}kx - 0 = -\mu_k mg$$

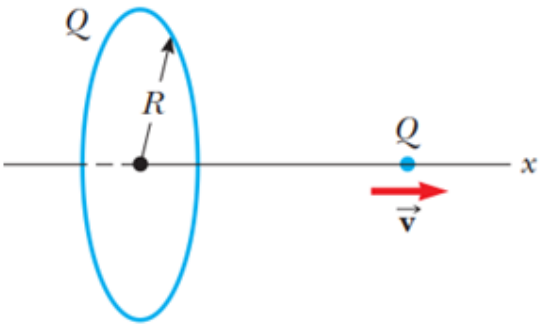
$$\frac{1}{2}kx = QE - \mu_k mg$$

$$x = \frac{2(QE - \mu_k mg)}{k}$$

Esta es la máxima elongación que sufrirá el resorte en el caso que exista fricción. Esta respuesta es la más general, obsérvese que en el caso particular en que no haya fricción ($\mu_k = 0$), se obtiene la respuesta al inciso (a).

13. El eje de las x es el eje de simetría de un anillo inmóvil con carga uniforme de radio R y de carga Q. Al inicio en el centro del anillo se ubica una partícula Q de masa M. Cuando ésta es desplazada ligeramente, la partícula se acelera a lo largo del eje de las x hacia el infinito. Demuestre que la rapidez final de la partícula es (Serway & Jewett, Jr, Física para ciencias e ingeniería, 2008)

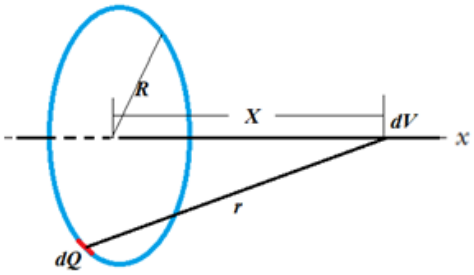
$$v = \left(\frac{2k_e Q^2}{MR}\right)^{1/2}$$



Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr;
Física para ciencia e ingeniería

Figura 65.

Solución. Para obtener la velocidad de la partícula primero debemos calcular el potencial que produce el anillo en cualquier punto sobre el eje x. Para ello, dado que es una carga distribuida debemos dividir el anillo en pequeños trozos (cargas puntuales) y calcular el potencial que produce cada trozo y realizar la suma de estos potenciales, esto es integrar



Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr;
Física para ciencia e ingeniería

Figura 66.

$$dV = k\frac{dQ}{r}$$

$$V = k\int \frac{dQ}{r}$$

De la figura 66 se tiene: $r = \sqrt{X^2 + R^2}$, esta cantidad se puede sacar de la integral puesto que permanece constante el recorrer todo el anillo

$$V = \frac{k}{\sqrt{X^2 + R^2}} \int dQ$$

$$V = k\frac{Q}{\sqrt{X^2 + R^2}}$$

La anterior expresión nos permite obtener el valor del potencial debido al anillo en cualquier punto a una distancia X del centro sobre su eje de simetría, y perpendicular al plano donde se encuentra el anillo.

Inicialmente se tiene que la carga Q se encuentra inmóvil en el centro del anillo, por lo tanto, la energía del sistema carga - anillo es solamente potencial, una vez

que la partícula se desplaza una pequeña distancia sobre el eje, el campo eléctrico del anillo repele a la partícula, y esta saldrá disparada sobre el eje de simetría. En el infinito (una distancia muy grande del centro del anillo), por definición el potencial eléctrico debido al anillo es cero y por lo tanto la energía del sistema es únicamente debido a la energía cinética de la partícula. Aplicando la ley de la conservación de la energía, se tiene:

$$E_{inicial} = E_{final}$$

$$Q.\Delta V = K$$

$$Q.k\frac{Q}{\sqrt{X^2 + R^2}} = \frac{1}{2}Mv^2$$

Como ya se dijo antes inicialmente Q está en el centro del anillo, entonces debemos hacer $X = 0$

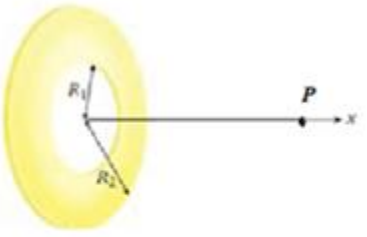
$$k\frac{Q^2}{R} = \frac{1}{2}Mv^2$$

Despejando para v, se llega a:

$$\boldsymbol{v = \left(\frac{2k_eQ^2}{MR}\right)^{1/2}}$$

Que es a donde queríamos llegar.

14. Obtenga una expresión para el potencial eléctrico a lo largo del eje (el eje x) de un disco (arandela) con un orificio en el centro, como muestra la figura 67, donde R_1 y R_2 son los radios interno y externo del disco, respectivamente. ¿Cuál sería el potencial si $R_1 = 0$? (Bauer & Westfall, 2011)



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. *Física; para ingenierías y ciencias con física moderna*

Figura 67.

Solución. Para solucionar este problema recurriremos a la siguiente imagen: podemos ver la arandela como un CD. Si tomamos un CD y lo miramos de frente encontramos que este está compuesto por una serie de anillo concéntricos, de igual manera veremos nuestra arandela. Compuesta por una serie de anillos de radio R, espesor dR y una cantidad de carga dQ, cada uno de estos anillos producirá un potencial dV en un punto sobre el eje x**.**

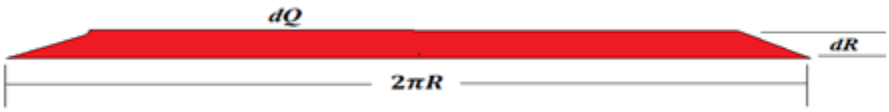


Figura 68. Autoría propia

Al extraer un anillo de estos cortarlo y estirarlo se verá como una banda rectangular de espesor dR y longitud $2\pi R$ Dado que la carga dQ se distribuye sobre la superficie de la arandela definiremos una densidad superficial de carga σ. Por lo tanto, la cantidad de carga que tiene este anillo es:

$$dQ = \sigma dA = \sigma . 2\pi R . dR$$

Este anillo producirá un pequeño potencial dV en el punto P, sobre el eje x; potencial que ya habíamos calculado en el problema anterior, por lo cual haremos uso del resultado encontrado,

$$dV = k\frac{dQ}{\sqrt{X^2 + R^2}}$$

Ahora debemos sumar (integrar) las contribuciones al potencial de cada uno de los anillos que conforman la arandela

$$V_p = k\int_{R_1}^{R_2}\frac{dQ}{\sqrt{X^2 + R^2}}$$

Reemplazando

$$dQ = \sigma dA = \sigma . 2\pi R . dR,$$

tenemos:

$$V_p = k\sigma\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{2RdR}{\sqrt{X^2 + R^2}}$$

Esta integral se puede solucionar por el método de sustitución,

$$U = X^2 + R^2$$

Derivando respecto a R

$$dU = 2RdR$$

Sustituyendo esto en la integral anterior

$$V_p = k\sigma\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{dU}{\sqrt{U}} = k\sigma\pi \int_{R_1}^{R_2} U^{-1/2}\, dU$$

Al realizar un cambio de variable deberíamos cambiar también los limites superior e inferior de la integral, en este caso no lo haremos puesto que al final regresaremos a la variable original. La anterior integral es muy fácil de calcular y procederemos a ello,

$$V_p = k\sigma\pi \int_{R_1}^{R_2} U^{-1/2}\, dU = k\sigma\pi \left. \frac{U^{1/2}}{1/2} \right|_{R_1}^{R_2}$$

Regresando a la variable original

$$V_p = 2k\sigma\pi \left. \sqrt{X^2 + R^2} \right|_{R_1}^{R_2}$$

$$V_p = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{X^2 + R_2^2} - \sqrt{X^2 + R_1^2} \right]$$

Ahora bien, si $R_1 = 0$, se tiene un disco de radio R, entonces el potencial para el disco a una distancia x sobre su eje de simetría es:

$$V_p = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{X^2 + R^2} - X\right]$$

Si recordamos que el campo y el potencial eléctrico están relacionados por la ecuación

$$\vec{\boldsymbol{E}} = -\vec{\boldsymbol{\nabla}}V = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\delta V}{\delta y}\,\hat{\jmath} + \frac{\delta V}{\delta z}\,\hat{k}\right]$$

Para nuestro caso el potencial solo depende de la coordenada *x*, entonces solo tendremos componente del campo en esa dirección, es decir,

$$E_{x-p} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_{x-p} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{X^2 + R^2} - X\right]\right)$$

$$E_{x-p} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{X^2 + R^2} - X\right]$$

$$E_{x-p} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\frac{X}{\sqrt{X^2 + R^2}} - 1\right]$$

$$E_{x-p} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{X}{\sqrt{X^2 + R^2}}\right]$$

15. Un campo eléctrico varía en el espacio según esta ecuación:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = E_0 x e^{-x}\,\hat{\imath}.$$

a) ¿Para qué valor de x el campo eléctrico tiene su valor máximo, $x_{máx}$?

b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los puntos x = 0 y x = $x_{máx}$?

Solución: Para determinar el punto donde el campo tiene el valor máximo, debemos primero hallar los puntos críticos del campo (esto es derivar la expresión para el campo igualarla a cero y mirar cuales son los valores de *x* que

hacen cero esta derivada, luego se toma la segunda derivada del campo y se evalúa está en los puntos críticos, y se aplica el criterio de la segunda derivada)

$$\frac{d}{dx}\,E = \frac{d}{dx}\left(\,E_0 x e^{-x}\,\right) = \,E_0 e^{-x} - \,E_0 x e^{-x} = 0$$

$$E_0 e^{-x}\,(1-x) = 0$$

De la anterior expresión se tiene:

$$e^{-x} = 0 \quad \text{ó} \quad (1-x) = 0$$

La primera condición se descarta, dado que ocurre en x infinito. Por lo tanto, no queda:

$$(1-x) = 0$$

$$x = 1$$

Ahora tomaremos la segunda derivada del campo lo que lo mismo derivar de nuevo la primera derivada y evaluarla en $x = 1$.

$$\frac{d^2E}{dx^2} = \frac{d}{dx}\,(E_0 e^{-x} - \,E_0 x e^{-x})$$

$$\frac{d^2E}{dx^2} = \,-E_0 e^{-x} - \,E_0 e^{-x} + E_0 x e^{-x}$$

$$\left.\frac{d^2E}{dx^2}\right|_{x=1} = \,-E_0 e^{-1} - \,E_0 e^{-1} + E_0(1)e^{-1} = \,-E_0 e^{-1}$$

Como se puede observar

$$\left.\frac{d^2E}{dx^2}\right|_{x=1} = \,-E_{0e^{-1}} \,< 0$$

Por lo tanto, se tiene que $x = 1$, es un máximo.

Ahora calcularemos la diferencia de potencial entre los puntos $x = 0$ y $x = 1$ para hacerlo debemos recordar que:

$$\Delta V = -\int_{l} \vec{E} \cdot \hat{u}_T \, dl$$

Donde, $\hat{u}_T$ es un vector unitario tangente a la trayectoria (en nuestro caso dirección *x*).

$$\Delta V = -\int_{0}^{1} E_0 x e^{-x} \, \hat{\imath} \cdot \hat{\imath} \, dx$$

Para calcular esta integral debemos solucionarla por partes

$$U = x \qquad \rightarrow \qquad dU = dx$$

$$dV = e^{-x} dx \qquad \rightarrow \qquad V = -e^{-x}$$

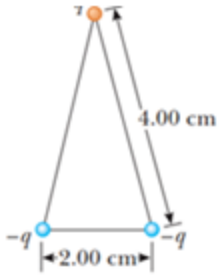
$$\Delta V = -\int_0^1 E_0 x e^{-x} \, \hat{\imath} \cdot \hat{\imath} \, dx = -E_0 \left(-x e^{-x}|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} \, dx \right)$$

$$\Delta V = -E_0(-e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1)$$

$$\Delta V = -E_0(-e^{-1} - [e^{-1} - 1])$$

$$\boldsymbol{\Delta V = E_0(2e^{-1} - 1)}$$

16. Las tres partículas con carga de la figura 69 están en los vértices de un triángulo isósceles. Calcule el potencial eléctrico en el punto medio de la base, si q = 7.00 μC. (Serway & Jewett, Jr, Física para ciencias e ingeniería, 2008)



Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr; *Física para ciencia e ingeniería*

Figura 69.

***Solución**:* Para solucionar este problema primero rotularemos cada una de las cargas, cada por si misma produce un potencial en el punto *p*. Las cargas 2 y 3 que están en la base del triángulo se encuentran equidistantes del punto *p*, dada

la simetría del triángulo. Para calcular el potencial de la carga 1 se debe calcular la altura del triángulo esto se hace por medio del teorema de Pitágoras

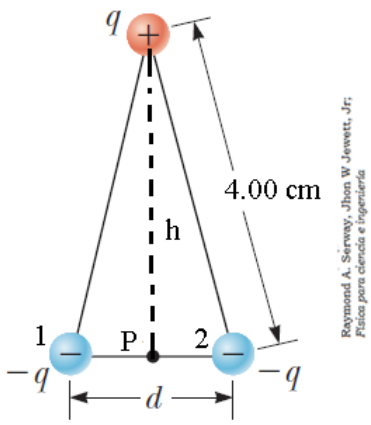


Figura 70.

$$h = \sqrt{4^2 - 1^2}$$

$$h = \sqrt{15}\, cm = 3.87\, cm = 0.0387\, m$$

$$V_p = V_1 + V_2 + V_3$$

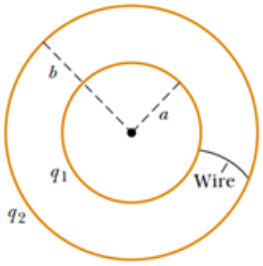
El potencial debido a una carga puntual a una distancia r está dado por:

$$V_p = k_e \frac{q}{r}, \quad de\ donde \quad k_e \approx 9 * 10^9\ {}^{Nm^2}/_{C^2}$$

$$V_p = 9 * 10^9 \frac{7 * 10^{-6}}{0.0387} - 9 * 10^9 \frac{7 * 10^{-6}}{0.01} - 9 * 10^9 \frac{7 * 10^{-6}}{0.01}$$

$$\boldsymbol{V_p = -10972093.02\, V \approx -10.97\, MV}$$

17. Two concentric spherical conducting shells of radii a = 0.400 m and b = 0.500 m are connected by a thin wire as shown in Figure 71. If a total charge Q = 10.0 μC is placed on the system, how much charge settles on each sphere? (Serway & Jewett, Jr., 2019)



Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr;
Física para ciencia e ingeniería

Figure 71.

Solución: Dado que las esferas están conectadas por medio del alambre estas formarán un solo conductor. Ahora bien, la superficie de un conductor en equilibrio electrostático estará toda al mismo potencial; lo cual quiere decir que las superficies de las dos esferas estarán al mismo potencial, esto es: $V_1 = V_2$, siendo V_1 el potencial en la superficie de la esfera 1 de igual manera V_2 será el potencial en la superficie de la esfera 2.

Por la *Ley de Gauss*, las esferas se comportan como cargas puntuales, entonces

$$V_1 = V_2$$

$$k_\epsilon \frac{q_1}{a} = k_\epsilon \frac{q_2}{b}$$

Realizando las simplificaciones correspondientes

$$\frac{q_1}{a} = \frac{q_2}{b}$$

Por el principio de conservación de la carga:

$$q_1 + q_2 = Q$$

Las últimas dos ecuaciones forman un sistema 2 x 2, despejando q_1 de la última ecuación y reemplazando en la otra tenemos:

$$q_1 = -q_2 + Q$$

$$\frac{Q - q_2}{a} = \frac{q_2}{b}$$

$$(Q - q_2)b = aq_2$$

$$Qb - q_2 b = aq_2$$

$$q_2 = \frac{b}{a+b} Q$$

$$q_2 = \frac{0.500}{0{,}400 + 0{,}500} * 10.0\ \mu C$$

$$\boldsymbol{q_2 = 5.56\ \mu C}$$

Reemplazando en la expresión para q_1

$$q_1 = -\frac{b}{a+b} Q + Q$$

$$q_1 = \frac{a}{a+b} Q$$

$$\boldsymbol{q_1 = 4.44\ \mu C}$$

18. Un tubo Geiger-Mueller es un detector de radiación que consiste en un cilindro metálico cerrado y hueco (el cátodo) de radio interior r_a y un alambre cilíndrico coaxial (el ánodo) de radio r_b. La carga por cada unidad de longitud sobre el ánodo es λ, y la carga por cada unidad de longitud sobre el cátodo es – λ. Entonces un gas llena el espacio entre los electrodos. Cuando una partícula elemental de alta energía pasa a través de este espacio, ioniza un átomo del gas. La intensidad del campo eléctrico hace que el ion y electrón resultantes aceleren en direcciones opuestas; golpean otras moléculas del gas y las ionizan, lo que produce una avalancha de descarga eléctrica. El pulso de la corriente eléctrica entre el alambre y el cilindro se cuenta mediante un circuito externo. a) Demuestre que la magnitud de la diferencia de potencial entre el alambre y el cilindro es

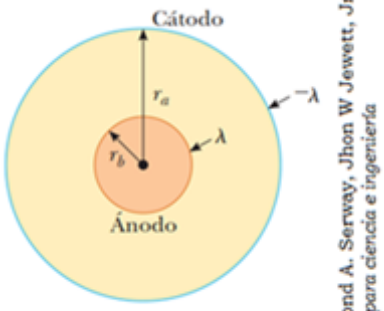


Figura 72.
Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr; *Física para ciencia e ingeniería*

$$\Delta V = 2k_e \lambda \ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)$$

b) Demuestre que la magnitud del campo eléctrico en el espacio entre cátodo y ánodo es

$$E = \frac{\Delta V}{\ln\left({}^{r_a}/_{r_b}\right)}\left(\frac{1}{r}\right)$$

donde r es la distancia desde el eje del ánodo al punto donde se calcula el campo. (Serway & Jewett, Jr, Física para ciencias e ingeniería, 2008)

Solución: Para calcular la diferencia de potencial entre los dos cilindros primero debemos hallar el campo eléctrico entre estos, y para hacerlo utilizaremos la *Ley de Gauss*. La superficie Gaussiana que tomaremos será otro cilindro entre ellos de radio r

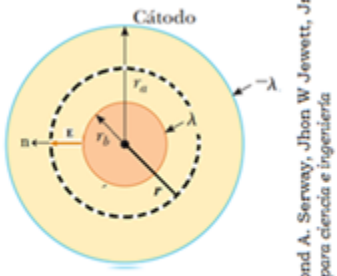


Figura 73.

Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr; *Física para ciencia e ingeniería*

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

En este caso dada la simetría del problema el campo eléctrico va en dirección radial al igual que la normal a la superficie, por lo tanto, el producto punto es igual al campo.

$$\oint_S E\ dS = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E \oint_S dS = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

La integral de superficie es igual al área del cilindro Gaussiano

$$E.2\pi rl = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q_{enc}}{2\pi rl\epsilon_0}$$

La carga que está encerrando la superficie Gaussiana es la carga de del cilindro interior y ℓ es la longitud del cilindro, por lo tanto,

$$\lambda = \frac{Q_{enc}}{l}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0}$$

Este es el campo entre los cilindros, ahora procederemos a calcular la diferencia de potencial entre los cilindros. La diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera donde existe un campo eléctrico está dado por:

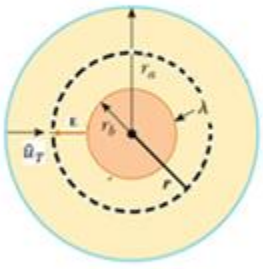


Figura 74.

Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr; *Física para ciencia e ingeniería*

$$\Delta V = -\int_l \vec{E} \cdot \hat{u}_T dl$$

El vector $\hat{u}_T$ es unitario y es tangente a la trayectoria, este caso va en dirección radial tal como se observa en la figura 74, y va en dirección opuesta al campo eléctrico, por lo tanto, el producto $\vec{E} \cdot \hat{u}_T$ es igual a – E.

$$\Delta V = \int_l E\, dr$$

Reemplazando el valor del campo hallado anteriormente se tiene:

$$\Delta V = \int_{r_b}^{r_a} \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}\, dr$$

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_b}^{r_a} \frac{dr}{r}$$

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r]_{r_b}^{r_a}$$

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln r_a - \ln r_b)$$

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)$$

La anterior ecuación la multiplicamos por 2 y la dividimos por 2, entonces:

$$\Delta V = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)$$

Con $k_e = {}^{1}/_{4\pi\epsilon_0}$, se tiene:

$$\boldsymbol{\Delta V = 2\,\lambda\, k_e \ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)}$$

Que es la ecuación a la cual nos pedían llegar. Ahora Vamos a dividir miembro a miembro las ecuaciones para el campo entre los cilindros y la diferencia de potencial entre estos.

Tomando la expresión para el campo y transformándola

$$E = \frac{Q_{enc}}{2\pi r l \epsilon_0} = \frac{2Q_{enc}}{4\pi r l \epsilon_0} = \frac{2\lambda k_e}{r\epsilon_0}$$

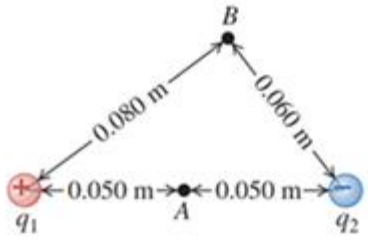
$$\frac{E}{\Delta V} = \frac{\frac{2\lambda k_e}{r\epsilon_0}}{2\,\lambda\, k_e\, \ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)}$$

$$\frac{E}{\Delta V} = \frac{1}{r \ln\left({}^{r_a}/_{r_b}\right)}$$

$$\boldsymbol{E = \frac{\Delta V}{\ln\left({}^{r_a}/_{r_b}\right)}\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Que era lo que queríamos demostrar.

19. Dos cargas puntuales q_1 = + 2.40 nC y q_2 = - 6.50 nC están separadas 0.100 m. El punto A está a la mitad de la distancia entre ellas; el punto B está a 0.080 m de q_1 y 0.060 m de q_2, figura 75. Considere el potencial eléctrico como cero en el infinito. Determine a) el potencial en el punto A; b) el potencial en el punto B; c) el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una carga de 2.50 nC que viaja del punto B al punto A. (YOUNG & FREEDMAN, Física universitaria con física moderna volumen 2, 2013)



Francis W. Sears, Mark W. Zemansky, Hugh D. Young, Roger A. Freedman. *Física Universitaria con Física Moderna*

Figura 75.

Solución: El potencial en un punto debido a una carga puntual esta dado por

$$V = k_e \frac{Q}{r}$$

Cuando se tienen varias cargas el potencial en un punto dado es la suma de los potenciales individuales

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

$$V = k_e \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{r_i}$$

Para nuestro caso

$$V_A = k_e \left\{ \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right\}$$

$$V_A = 9 * 10^9 \left\{ \frac{2.40 * 10^{-9}}{0.050} + \frac{-6.50 * 10^{-9}}{0.050} \right\}$$

$$\boldsymbol{V_A = -738\ V}$$

$$V_B = 9 * 10^9 \left\{ \frac{2.40 * 10^{-9}}{0.080} + \frac{-6.50 * 10^{-9}}{0.060} \right\}$$

$$\boldsymbol{V_B = -705\ V}$$

Tal como se puede observar $V_B > V_A$,esto significa que, si se coloca una carga positiva en B esta tendera a moverse hacia A, pues partículas cargadas positivamente tienden a moverse hacia regiones de menor potencial, y el campo eléctrico es quien realiza el trabajo; es decir, que el trabajo para mover una carga de B a A debe ser positivo.

Por definición se tiene:

$$W = -\Delta U$$

$$\Delta U = q * \Delta V$$

Para nuestro caso

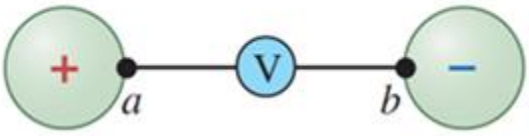
$$W_{B\to A} = -q * V_{BA}$$

$$W_{B\to A} = -q * (V_A - V_B)$$

$$W_{B\to A} = -2.50 * 10^{-9} (-738 - [-705])$$

$$\boldsymbol{W_{B\to A} = 82.5 * 10^{-9}\ J}$$

20. Dos esferas aislantes idénticas con cargas opuestas, cada una de 50.0 cm de diámetro y con carga uniforme de magnitud 175 μC, están colocadas con sus centros separados por una distancia de 1.00 m. a) Si se conecta

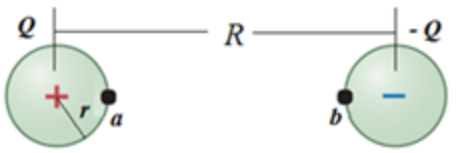


Francis W. Sears, Mark W. Zemansky, Hugh D. Young, Roger A. Freedman. *Física Universitaria con Física Moderna*

Figura 76.

un voltímetro entre los puntos más cercanos (a y b) sobre sus superficies, ¿cuál será la lectura? b) ¿Cuál punto, a o b, está en el potencial más grande? ¿Cómo se puede saber esto sin hacer cálculos? (YOUNG & FREEDMAN, Física universitaria con física moderna volumen 2, 2013)

Solución: Como ya se ha dicho antes las esferas se comportan como cargas puntuales. Sean a y b puntos sobre las superficies de las esferas, figura 77. El potencial en a o b, es el potencial debido a cada una de las esferas, comportándose cada una de ellas como cargas puntuales como ya se mencionó



Francis W. Sears, Mark W. Zemansky, Hugh D. Young, Roger A. Freedman. *Física Universitaria con Física Moderna*

Figura 77.

$$V_a = k_e \frac{Q}{r} + k_e \frac{-Q}{R-r}$$

$$V_a = k_e\, Q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R-r}\right)$$

$$V_a = k_e\, Q \left(\frac{R-r-r}{r(R-r)}\right)$$

$$V_a = k_e\, Q \left(\frac{R-2r}{r(R-r)}\right)$$

$$V_b = k_e \frac{-Q}{r} + k_e \frac{Q}{R-r}$$

$$V_b = k_e Q \left(\frac{-1}{r} + \frac{1}{R-r}\right)$$

$$V_b = k_e Q \left(\frac{2r-R}{r(R-r)}\right)$$

$$V_{ab} = V_b - V_a$$

$$V_{ab} = k_e Q \left(\frac{2r-R}{r(R-r)}\right) - k_e\, Q \left(\frac{R-2r}{r(R-r)}\right)$$

$$V_{ab} = k_e \frac{Q}{r(R-r)} \left[2r - R - (R-2r)\right]$$

$$\boldsymbol{V_{ab} = 2 * k_e\, Q \frac{(2r-R)}{r(R-r)}}$$

Ahora reemplazando todos los valores

$$V_{ab} = 2 * 9 * 10^{9} * 175 * 10^{-6} * \frac{(2 * 0.25 - 1.00)}{0.25 * (1.00 - 0.25)}$$

$$\boldsymbol{V_{ab} = -8400000\, V = -8.4 * 10^{6}\, V = -8.4\, MV}$$

Ahora bien, puesto que $\boldsymbol{V_{ab} < 0}$ $\boldsymbol{(V_b < V_a)}$, lo que quiere decir que el punto *a* esta a mayor potencial que el punto *b*, lo cual es perfectamente predecible puesto que entre más cerca estemos de una positiva y más lejos de una carga negativa el potencial será mayor.

21. La figura 78 muestra el potencial de una distribución de carga como función de x. Elabore un gráfico del campo eléctrico E_x sobre la región que se ilustra. (YOUNG & FREEDMAN, Física universitaria con física moderna volumen 2, 2013)

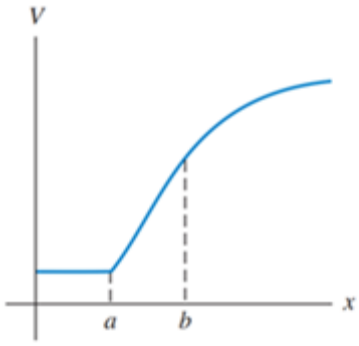


Figura 78.

Francis W. Sears, Mark W. Zemansky, Hugh D. Young, Roger A. Freedman. *Física Universitaria con Física Moderna*

Solución: Se tiene que el campo y el potencial están relacionados por medio de la ecuación:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\delta V}{\delta y}\,\hat{\jmath} + \frac{\delta V}{\delta z}\,\hat{k}\right]$$

La anterior ecuación nos indica que, si conocemos la función potencial eléctrico para hallar el campo "basta" con tomar la "derivada" de esta y multiplicarla por menos uno. Para el caso que nos ocupa solo tenemos potencial en la dirección x, lo que nos facilita los cálculos puesto que las derivadas con respecto a y, y z serán iguales a cero, es decir, solo tendremos componente del campo en dirección x.

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Entonces ahora procederemos a derivar por trozos la gráfica dada. La parte de cero hasta a, es una constante, y se tiene que la derivada de una constante es cero; lo que quiere decir esto es que no hay campo entre cero y a. entre a y b, la función potencial es lineal con pendiente positiva, al derivar una función lineal da una constante (la pendiente), entonces el campo en esta parte será constante y se toma con signo contrario. Es decir, nos da una constante negativa. Para $x > a$, no se conoce bien la dependencia funcional, por lo tanto, también la derivada nos dará una curva, pero con concavidad contraria, esto por el signo menos de la derivada. Con todo lo anterior la gráfica del campo es:

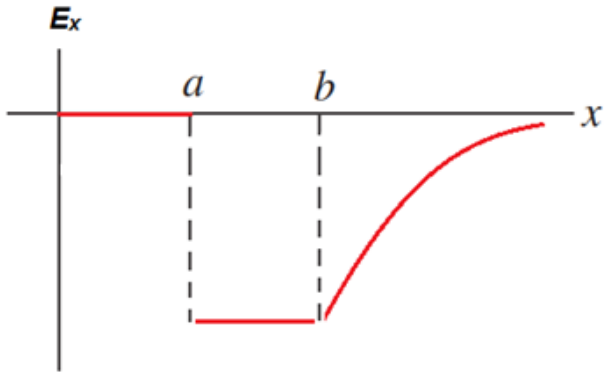


Figura 79. Autoría propia

22. Consider starting at the center of the left-hand sphere (sphere 1, of radius a) in Figure 80 and moving to the far right of the diagram, passing through

the center of the right-hand sphere (sphere 2, of radius c) along the way. The centers of the spheres are a distance b apart. Draw a graph of the electric potential as a function of position relative to the center of the left-hand sphere. (Serway & Jewett, Jr., 2019)

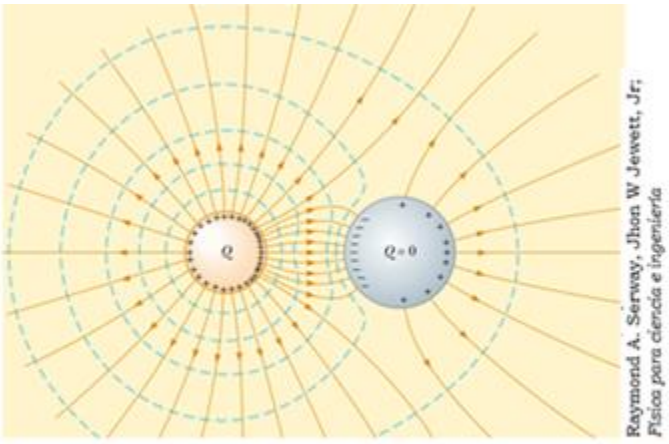


Figure 80

Solución: Lo primero que vamos a realizar para entender mejor el problema es ubicar las esferas en un sistema coordenado, Figura 81.

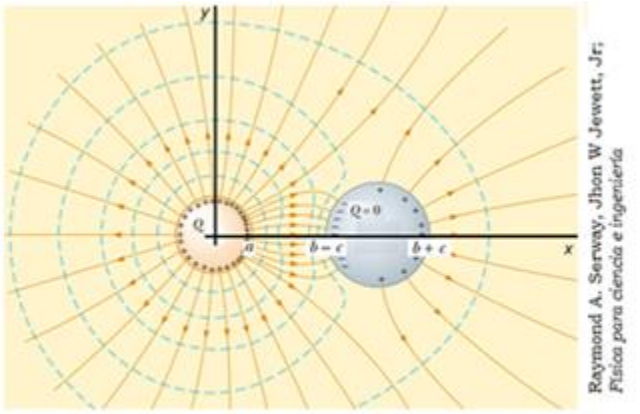


Figura 81.

La esfera 2 no posee carga neta, pero ella es afectada por el campo eléctrico generado por la esfera 1. Dado que la esfera 2 es conductora el campo eléctrico de 1 hace que esta se "polarice", es decir, hay una redistribución en la superficie de esta, ocurre una migración de carga negativa hacia el lado izquierdo de esta, hasta que se alcanza el equilibrio electrostático. Quedando tal como se muestra en la figura.

Ahora bien, el campo eléctrico a lo largo del eje x y el potencial se relacionan por:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Puesto que tenemos esferas conductoras en equilibrio electrostático, el campo eléctrico en su interior es cero, lo cual significa que la derivada del potencial es cero, es decir, el potencial al interior de las esferas es constante; obviamente el

potencial al interior de la esfera uno es mayor que el potencial al interior de la esfera 2, puesto que la esfera 1 está cargada positivamente.

Fuera de la esfera 1, el potencial básicamente es el potencial debido a una esfera puntual, es decir, varia inversamente proporcional a la distancia al centro de la esfera; pero este potencial es modificado por la presencia de la esfera 2. Con este análisis se tiene que la gráfica del potencial en función de *x* es el que se observa en la figura 82.

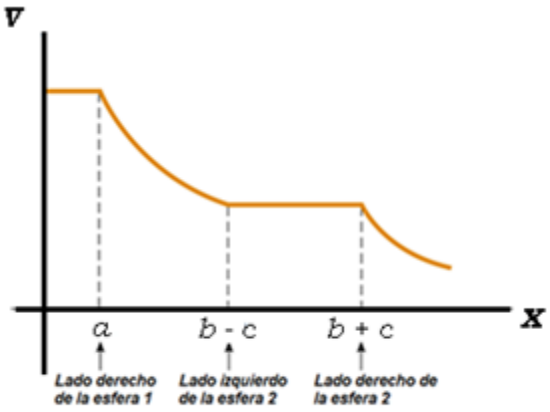
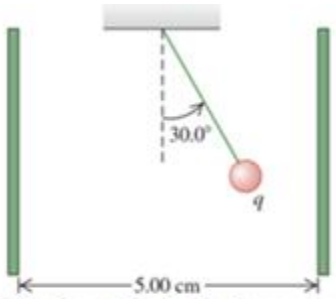


Figura 82.

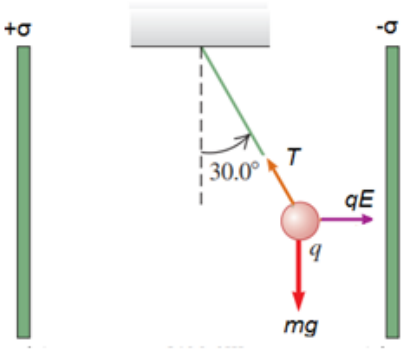
23. Una esfera pequeña con masa de 1.50 g cuelga de una cuerda entre dos placas verticales paralelas separadas por una distancia de 5.00 cm. Las placas son aislantes y tienen densidades de carga superficial uniformes de + σ y - σ. La carga sobre la esfera es q = 8.90*10^{-6} C. ¿Cuál diferencia de potencial entre las placas ocasionará que la cuerda formará un ángulo de 30^{0}? con respecto a la vertical? (Young & Freedman, 2013)



Francis W. Sears, Mark W. Zemansky, Hugh D. Young, Roger A. Freedman. *Física Universitaria con Física Moderna*

Figura 83.

Solución: De acuerdo con la figura 83, se tiene que la placa derecha es la que está cargada negativamente, dado que quien desplaza la carga es el campo creado por las placas. Ahora procederemos a dibujar cada una de las fuerzas que actúan sobre la carga (peso, fuerza del campo eléctrico, tensión de la cuerda)



Francis W. Sears, Mark W. Zemansky, Hugh D. Young, Roger A. Freedman. *Física Universitaria con Física Moderna*

Figura 84.

Tal como se observa en la figura 84 la tensión esta inclinada, por lo tanto, vamos a descomponerla en sus componentes rectangulares y procederemos a aplicar las condiciones de equilibrio

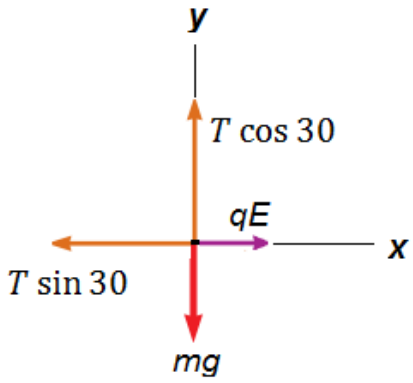


Figura 85. Autoría propia

$$\sum F_y = 0$$

$$T\cos 30 - mg = 0$$

$$T = \frac{mg}{\cos 30}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$qE - T\sin 30 = 0$$

Reemplazando T en la anterior ecuación se tiene

$$qE - \frac{mg}{\cos 30} \sin 30 = 0$$

$$qE - mg * \tan 30 = 0$$

Ahora despejaremos el campo, dado que este está directamente relacionado con la diferencia de potencial entre las placas.

$$E = \frac{mg * \tan 30}{q}$$

La diferencia de potencial entre las placas está dada por

$$\Delta V = Ed$$

Donde d es la separación entre las placas, entonces

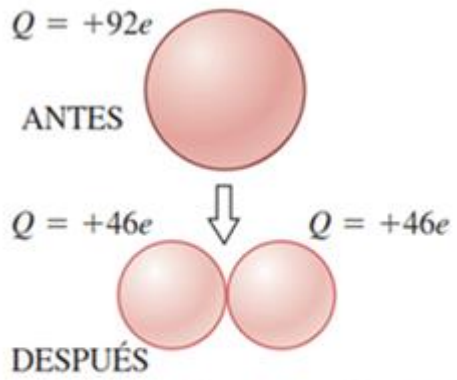
$$\Delta V = E * d = \frac{mg * \tan 30}{q} * d$$

Reemplazando los valores dados

$$\Delta V = E * d = \frac{1.5 * 10^{-3} * 9.8 * \tan 30}{8.9 * 10^{-6}} * 5 * 10^{-2}$$

$$\boldsymbol{\Delta V = 47.68\ V}$$

24. Fisión nuclear. El núcleo inestable del uranio 236 se puede considerar una esfera con carga uniforme con Q = + 92 e y radio R = 7.4* 10^{-15} m. En la fisión nuclear, este núcleo se puede dividir en dos núcleos más pequeños, cada uno con la mitad de la carga y del volumen del núcleo original del uranio 236. Ésta es una de las reacciones que ocurrieron en la bomba nuclear que se hizo detonar en Hiroshima, Japón, en agosto de 1945. a) Calcule los radios de los dos núcleos "hijos" de carga +46e. b) En un modelo sencillo del proceso de fisión, inmediatamente después que el núcleo de uranio 236 ha pasado por el proceso de fisión, los núcleos "hijos" están en reposo y apenas en contacto,



Francis W. Sears, Mark W. Zemansky, Hugh D. Young, Roger A. Freedman. *Física Universitaria con Física Moderna*

Figura 86.

como se ilustra en la figura. Calcule la energía cinética que cada uno de estos núcleos "hijos" tendrá cuando estén muy separados. c) En este modelo, la suma de las energías cinéticas de los dos núcleos "hijos", calculadas en el inciso b), es igual a la energía liberada por la fisión del núcleo de uranio 236. Calcule la energía liberada por la fisión de 10.0 kg de uranio 236. La masa atómica del uranio 236 es 236 u, donde 1 u = 1 unidad de masa atómica = $1.66 * 10^{-24}$ kg. Exprese su respuesta tanto en Joules como en kilotones de TNT (1 kilotón de TNT libera $4.18 * 10^{12}$ J al explotar). d) En términos de este modelo, analice por qué una bomba atómica podría llamarse también "bomba eléctrica". (YOUNG & FREEDMAN, Física universitaria con física moderna volumen 2, 2013)

Solución: Para encontrar el radio de los núcleos hijos se tiene que el volumen del núcleo original es igual al doble del volumen de un núcleo hijo

$$V = 2 * V_{hijo}$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2 * \frac{4}{3}\pi r_{hijo}^3$$

$$\boldsymbol{r_{hijo} = \frac{R}{\sqrt[3]{2}}}$$

$$r_{hijo} = \frac{7.4 * 10^{-15}}{\sqrt[3]{2}}$$

$$r_{hijo} = 5.87 * 10^{-15} m$$

Los núcleos hijos se pueden considerar como cargas puntuales separadas por una distancia igual al diámetro de uno de ellos. En un sistema de cargas hay almacenada una energía potencial, para este sistema, la energía potencial asociada es

$$U = k_e \frac{Q_1 * Q_2}{2 * r_{hijo}}$$

Dado que los núcleos hijos son idénticos se tiene:

$$U = k_e \frac{Q_1^2}{2 * r_{hijo}} \; k_e \frac{(46e)^2}{2 * r_{hijo}}$$

$$U = 9 * 10^9 \frac{(46 * 1.6 * 10^{-19})^2}{2 * 5.87 * 10^{-15}}$$

$$\boldsymbol{U = 4.15 * 10^{-11} J}$$

Ahora bien, debido a la repulsión entre ellos van a salir "disparados" en direcciones opuestas, es decir cuando estén muy alejados esta energía potencial inicial se va a convertir en energía cinética; puesto que los núcleos son idénticos tendrán la misma energía cinética, esto es

$$U = 2 * K$$

$$K = \frac{U}{2}$$

$$K = \frac{4.15 * 10^{-11}}{2} J$$

$$\boldsymbol{K = 2.08 * 10^{-11} J}$$

Para saber cuánta energía se libera en la fisión de 10.0 kg de Uranio 236, debemos encontrar cuantos átomos hay en dicha cantidad de Uranio, esto se logra mediante una regla de tres simples. La masa de un núcleo de Uranio es:

$$m_{nucleo} = 236\, u * 1.66 * 10^{-27} \frac{kg}{u}$$

$$m_{nucleo} = 3.92 * 10^{-25}\, kg$$

Entonces el número de átomos de Uranio 236 en 10.0 kg

$$Numero\ de\ atomos = n = \frac{10.0\, kg}{3.92 * 10^{-25}\, kg}$$

$$n = 2.55 * 10^{25}\, atomos$$

Por cada átomo hay un núcleo y por cada núcleo, dos núcleos hijos. Dado que ya se calculó la energía cinética de un núcleo hijo, entonces la energía que se libera en la fisión de los 10.0 kg de Uranio es:

$$E = 2 * n * K = n * U$$

$$E = 2.55 * 10^{25} * 4.15 * 10^{-11} J$$

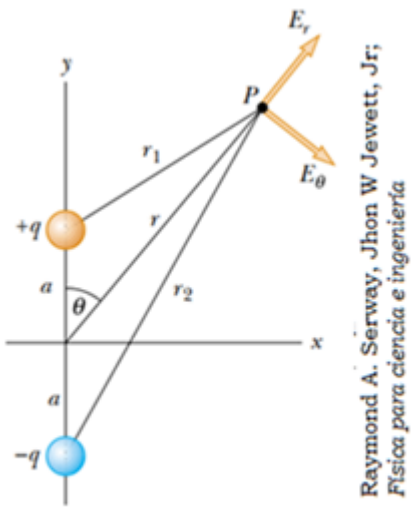
$$E = 1.06 * 10^{15}\, J$$

Si, 1 kilotón de TNT libera 4.18* 10^{12} J al explotar, entonces la energía liberada en kilotones será:

$$E = \frac{1.06 * 10^{15}\, J}{4.18 *\ 10^{12}\ \mathrm{J}} = 253.59\ kilotones$$

25. An electric dipole is located along the y axis as shown in Figure 87. The magnitude of its electric dipole moment is defined as $p = 2qa$. (a) At a point P, which is far from the dipole ($r \gg a$), show that the electric potential is

$$V = k_e \frac{p \cos\theta}{r^2}$$



Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr; *Física para ciencia e ingeniería*

Figura 87.

(b) Calculate the radial component E_r and the perpendicular component E_θ (of the associated electric field. Note that $E_\theta = -\left({}^{1}/_{r}\right)\left({}^{\partial V}/_{\partial\theta}\right)$. ¿Do these results seem reasonable for θ = 90° and θ = 0°? for $r = 0$? (c) For the dipole arrangement shown, express V in terms of Cartesian coordinates using $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ and

$$\mathrm{Cos}\frac{y}{(x^2 + y^y)^{1/2}}$$

Using these results and again taking $r \gg a$, calculate the field components E_x and E_y. (Serway & Jewett, Jr., 2019)

Solución: Como ya se hemos mencionado antes el potencial en un punto debido a un sistema de cargas es igual a la suma de los potenciales individuales, por lo tanto, cada una de las partículas produce un potencial en el punto *P.*

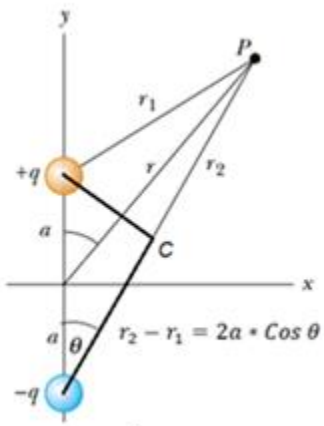
$$V_P = V_+ + V_-$$

$$V_P = k_e \frac{q}{r_1} - k_e \frac{q}{r_2}$$

$$V_P = k_e q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$V_P = k_e q\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$

Si bajamos una perpendicular desde la carga positiva hasta r_2, punto C, entonces se tiene que la distancia que hay desde la carga negativa hasta C será la diferencia de distancias entre $r_1\, y\, r_2$, $(r_2 - r_1)$; esto sucede puesto que $r \gg a$, (básicamente los radios $r_1\, y\, r_2$ son paralelos). Esta diferencia de distancias esta dada por



Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr; *Física para ciencia e ingeniería*

Figura 88.

$$r_2 - r_1 = 2a * Cos\,\theta$$

Además, $r_1\, y\, r_2$ son aproximadamente iguales a r. Con estas consideraciones se tiene:

$$V_P = k_e q\left(\frac{2a * Cos\,\theta}{r^2}\right)$$

El momento dipolar esta dado por $p = 2a$, entonces

$$\boldsymbol{V_P = k_e \frac{p * Cos\theta}{r^2}}$$

Que es lo que nos piden demostrar.

Ahora se procederá a calcular las componentes radiales y tangenciales del campo eléctrico.

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(k_e \frac{p * Cos\theta}{r^2}\right) = k_e \frac{2p * Cos\theta}{r^3}$$

$$E_r = -k_e \frac{2p * Cos\theta}{r^3}$$

$$E_\theta = -\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial V}{\partial r} = -\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left(k_e \frac{p * Cos\theta}{r^2}\right) = k_e \frac{p * Sin\theta}{r^3}$$

$$\boldsymbol{E_\theta = k_e \frac{p * Sin\theta}{r^3}}$$

26. El campo eléctrico, $\overrightarrow{E}(\vec{r})$, y el potencial eléctrico, $V(\vec{r})$, se calculan a partir de la distribución de carga $\rho(\vec{r})$, al integrar la ley de Coulomb y luego el campo eléctrico. En la otra dirección, el campo y la distribución de carga se determinan a partir del potencial mediante diferenciación idónea. Suponga que el potencial eléctrico en una gran región del espacio está dado por $V\,(r) = V_0 e^{-\left(r^2/a^2\right)}$, donde V_0 y a son constantes y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es la distancia al origen. (Young & Freedman, 2013)

a) Encuentre el campo eléctrico $\overrightarrow{E}(\vec{r})$ en esta región
b) Determine la densidad de carga $\rho(\vec{r})$, en esta región, que origina el potencial y el campo.
c) Encuentre la carga total en esta región.
d) Esboce la distribución de carga que podría originar tal campo eléctrico.

Solución:

que el campo eléctrico y el potencial están relacionados por:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{k}\right)V$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{k}\right)$$

Como ya se ha mencionado antes lo que indica la anterior ecuación es que para obtener el campo conociendo el potencial solo basta con derivar, conocido esto entonces procedernos a derivar, pero antes reescribiremos la expresión para el potencial

$$V\,(r) = V_0 exp\left(-r^2/a^2\right)$$

Reemplazando r por $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, se obtiene

$$V(x,y,z) = V_0 exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2}\right)$$

Realizando cada una de las derivadas y multiplicando por "menos", se obtiene

$$\vec{E}(x,y,z) = V_0\left(\frac{2x}{a^2}\hat{\imath} + \frac{2y}{a^2}\hat{\jmath} + \frac{2z}{a^2}\hat{k}\right) * exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2}\right)$$

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{2}{a^2}V_0\left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right) * exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2}\right)$$

Dado que $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, entonces podemos reescribir el campo como:

$$\boldsymbol{\vec{E}(r) = \frac{2\vec{r}}{a^2}V_0 * exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)}$$

$$E = \frac{2r}{a^2}V_0 * exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

La anterior expresión se había podido obtener si hubiésemos derivado directamente el potencial respecto a *r*.

También se puede expresar el campo eléctrico en términos del potencial:

$$\boldsymbol{\vec{E}(r) = \frac{2\vec{r}}{a^2}V(r)}$$

ley de Gauss, establece que

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

La carga encerrada por la superficie Gaussiana se puede escribir en términos de la densidad volumétrica de carga ρ, presente en el volumen encerrado por la superficie

$$Q_{enc} = \int_V \rho \, dV$$

Entonces se tiene

$$\oint_s \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV$$

Utilizando el Teorema de la divergencia

$$\oint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \, dV$$

Sin entrar en detalles lo que muestra este teorema es que una integral de superficie se puede convertir en una integral de volumen y viceversa (obviamente existen restricciones)

Aplicando este teorema en la ley de Gauss se tiene

$$\oint_s \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dV$$

$$\epsilon_0 \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dV - \int_V \rho \, dV = 0$$

Agrupando bajo una sola integral

$$\int_V \left(\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \rho\right) dV = 0$$

Dado que el resultado de esta integral es cero, entonces se tiene que el integrando es cero, es decir,

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \rho = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

anterior ecuación (forma diferencial de la ley de Gauss) nos dice que, si conocemos el campo en determinada región del espacio, entonces podemos obtener la densidad de carga en dicha región.

Ahora bien, puesto que el campo y potencial están relacionados entre sí, como ya se ha mencionado en múltiples ocasiones

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} V\right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Utilizando el cálculo vectorial se tiene

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

De donde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La anterior ecuación también se puede escribir como

$$Lap\, V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Se lee "*Laplaciano de V*".

En términos reduccionistas, de todo lo anterior se desprende que: si se conoce el potencial solo basta con derivar este una vez y se obtendrá el campo y si se deriva dos veces el potencial se obtendrá la densidad de carga.

Como ya se obtuvo el campo ahora solo falta derivar el campo o derivar otra vez el potencial para hallar la densidad de carga.

$$\rho = \epsilon_0(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$$

$$\rho = \epsilon_0 \left(\frac{\partial}{\partial r}\hat{r} \cdot E\hat{r}\right)$$

$$\rho = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial r}$$

$$\rho = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{2r}{a^2}V_0 * exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)\right]$$

$$\rho = \epsilon_0 \left[\frac{2}{a^2}V_0 * exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) - \frac{4r^2}{a^4}V_0 * exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)\right]$$

$$\rho = \epsilon_0 \frac{2}{a^2}V_0 \left[1 - \frac{2r^2}{a^2}\right] exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right)$$

La carga total en esta región del espacio se podría calcular por medio de integración de la densidad volumétrica de carga que acabamos de hallar, pero la integral daría una función Gamma, que por ahora escapa a los propósitos de esta cartilla.

CAPACITANCIA

Desde que los físicos descubrieron la electricidad una de sus grandes inquietudes era como poder almacenar carga o energía en un dispositivo. Ese problema quedo resuelto cuando se inventó el *capacitor*. Un capacitor es un dispositivo que consiste en dos armazones metálicos cargados con la misma cantidad de carga, pero de signo opuesto. Figura 89, dispositivo que es capaz de almacenar tanto carga como energía, pero como es que esto sucede. Para cargar los armazones inicialmente se comienza con estos totalmente descargados, por lo tanto, se necesita transferir carga de uno a otro, para hacer esto es necesario realizar trabajo, trabajo que se almacena en forma de energía potencial.

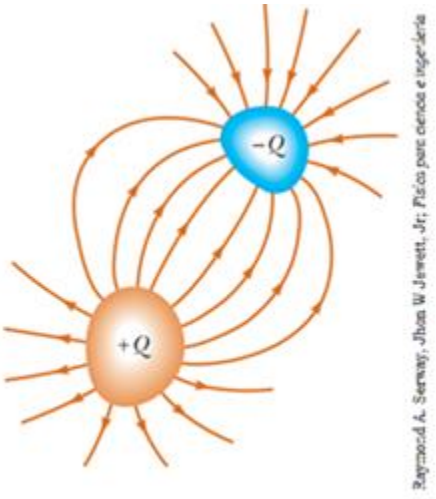


Figura 89.

La capacitancia de un dispositivo se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$C = \frac{Q}{V}$$

De donde Q, es el valor absoluto de la carga depositada en uno de los armazones y V, es la diferencia de potencial entre las superficies de estos. Las unidades de la capacitancia son los *faradios* (F), en honor al físico y químico británico Michael Faraday (1791 – 1867). El faradio es una unidad muy grande, por lo que en la práctica los valores de estos se encuentran en microfaradios (μF, 1 μF = 10^{-6}F) o nanofaradios (nF, 1nF = 10^{-9}F).

Los capacitores son dispositivos que tienen una gran variedad de aplicaciones y usos. Sus usos van desde las aplicaciones en las pantallas táctiles de los dispositivos electrónicos, hasta los desfibriladores utilizados en la medicina.

La energía almacenada en el capacitor está dada por

$$\boldsymbol{U = \frac{1}{2}CV^2}$$

Utilizando la definición de capacitancia la anterior ecuación también se puede escribir como

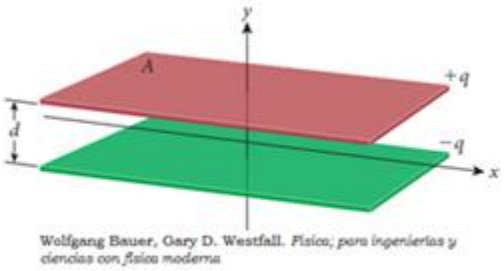
$$\boldsymbol{U = \frac{1}{2}QV}$$

$$\boldsymbol{U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

Debido a que entre los armazones de un capacitor hay campo eléctrico entonces se tiene que en esa región existe una energía almacenada. La *densidad de energía* (energía almacenada por unidad de volumen) en una región del espacio donde existe un campo eléctrico está dada por

$$\boldsymbol{u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2}$$

La capacitancia de un dispositivo depende de la configuración geométrica de los armazones, es así como la capacitancia de un capacitor cuyos armazones son dos placas plano-paralelas, figura 90, es



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. *Física, para ingenierías y ciencias con física moderna*

Figura 90. Capacitor de placas plano paralelas

$$\boldsymbol{C = \frac{\epsilon_0 A}{d}}$$

De donde *A*, es el área de las placas y *d* la separación e de estas.

La capacitancia de un capacitor cilíndrico es:

$$C = \frac{l}{2k_e \ln\left(b/a\right)}$$

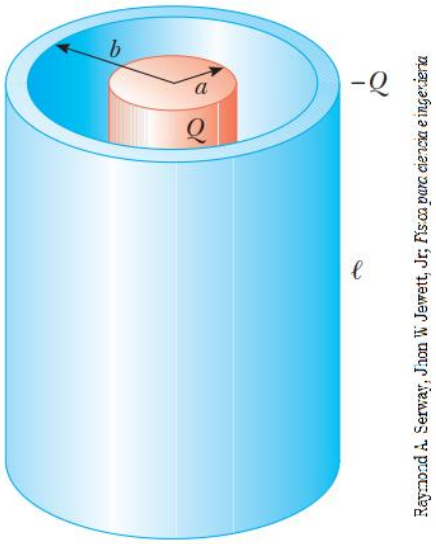


Figura 91. Capacitor cilíndrico

La capacitancia de un capacitor esférico está dada por

$$C = \frac{ab}{k_e(b-a)}$$

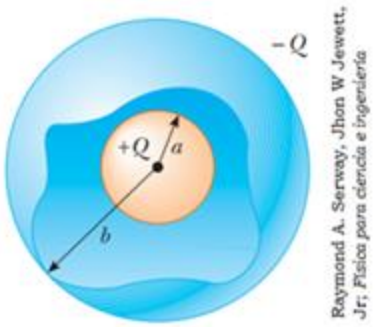
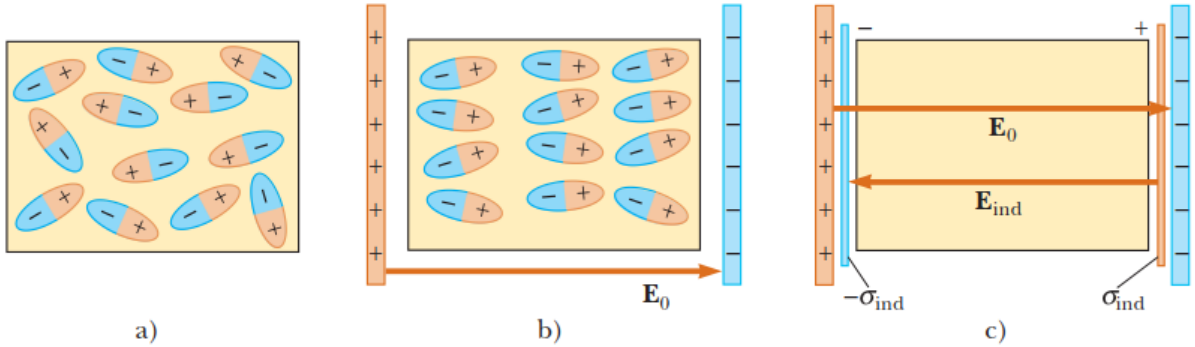


Figura 92. Capacitor esférico

Cuando a un capacitor se le inserta un dieléctrico entre sus armazones su capacitancia de este aumenta. En su estado natural los dipolos de este están ordenados al azar, figura 93(a). Cuando el dieléctrico es sometido a la acción de un campo eléctrico externo sus moléculas tienden a alinearse con el campo, a este fenómeno se le conoce como *polarización*, figura 93(b), debido a la polarización del dieléctrico sobre las caras de este aparece una *carga inducida*, figura 93(c). Esta carga inducida genera un campo eléctrico adicional, un *campo eléctrico inducido*, que

se opone al campo eléctrico externo, (es como si apareciesen un par de placas adicionales), lo cual hace que el campo eléctrico neto entre las placas disminuya. Disminución que conlleva a que la diferencia de potencial entre las placas del capacitor disminuya y por lo tanto la capacitancia se vea afectada, la capacitancia ahora tendrá un valor mayor, es decir el efecto de introducir un dieléctrico entre los armazones de un capacitor entre sus armazones es hacer que la capacitancia de este aumente.



Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr;
Física para ciencia e ingeniería

Figura 93. Capacitor con dieléctrico

La diferencia de potencial ahora entre las placas del capacitor es

$$V = \frac{V_0}{K}$$

De donde K es una constante que depende del tipo de dieléctrico que se haya introducido, llamada *constante dieléctrica* y es adimensional, en la tabla No.1 se ilustran algunos valores para diferentes tipos de dieléctrico. Y V_0 es el potencial entre las placas cuando no hay dieléctrico. Hay que mencionar que los dieléctricos soportan un máximo valor de campo eléctrico antes de que estos se vuelvan conductores, a este valor se le conoce como *Intensidad dieléctrica, esfuerzo dieléctrico* o *resistencia dieléctrica.*

Constantes dieléctricas y resistencias dieléctricas aproximadas de diversos materiales a temperatura ambiente

Material	Constante dieléctrica κ	Intensidad dieléctrica[a] (10^6 V/m)
Aceite de silicón	2.5	15
Agua	80	—
Aire (seco)	1.000 59	3
Baquelita	4.9	24
Cloruro de polivinilo	3.4	40
Cuarzo fundido	3.78	8
Hule de neopreno	6.7	12
Mylar	3.2	7
Nylon	3.4	14
Papel	3.7	16
Papel impregnado en parafina	3.5	11
Poliestireno	2.56	24
Porcelana	6	12
Teflón	2.1	60
Titanato de estroncio	233	8
Vacío	1.000 00	—
Vidrio pirex	5.6	14

[a] La resistencia dieléctrica es igual al campo eléctrico máximo que puede existir en un dieléctrico sin que se rompa el aislamiento. Observe que estos valores dependen en gran medida de si existen o no impurezas o defectos en los materiales.

Tabla No. 1. Constantes dieléctricas e intensidad dieléctrica

Como ya se mencionó debido al dieléctrico el potencial entre los armazones disminuye, por lo tanto, la capacitancia cambia, por la definición se tiene

$$C = \frac{Q}{V}$$

Reemplazando ahora el potencial

$$C = \frac{Q}{\frac{V_0}{K}}$$

$$C = K\frac{Q}{V_0}$$

$$\boldsymbol{C = KC_0}$$

De donde $\boldsymbol{C_0}$ es la capacitancia del capacitor sin dieléctrico. Dado que $\boldsymbol{K}$ es uan constante mayor que uno esta ecuación nos indica que la capacitancia del capacitor ahora es mayor. Es decir, el dieléctrico hace que la capacitancia aumente.

A manera de conclusión podríamos decir que las ventajas de introducir un dieléctrico entre los armazones del capacitor son

- Provee un soporte mecánico, pues evita que los armazones se toquen
- Aumenta el voltaje de operación
- Aumenta la capacitancia

Los capacitores se pueden conectar de diferente manera, *serie* o *paralelo*. La figura 94 ilustra la conexión capacitores en serie. Cuando se tiene una red de capacitores esta red se puede reducir a un solo capacitor llamado capacitor equivalente. El valor de este capacitor equivalente en términos de los valores de los capacitores de la red está dado por

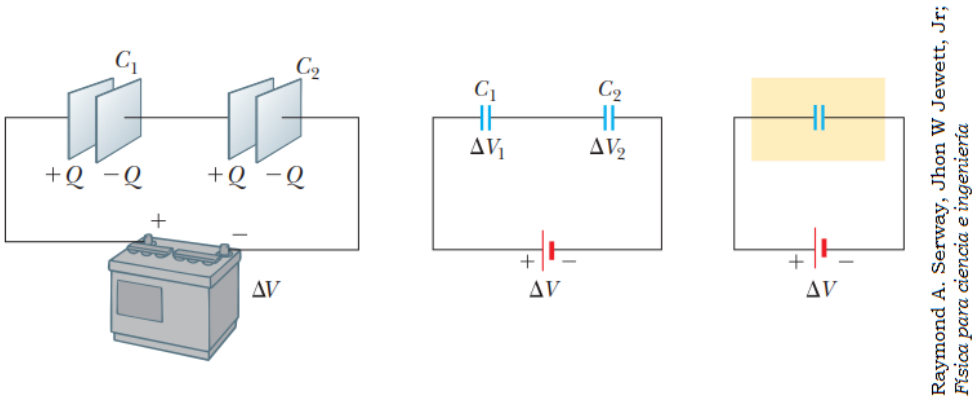


Figura 94. Conexión de capacitores en serie

$$\frac{1}{C_{equi}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

La figura 95 ilustra capacitores conectados en paralelo. La capacitancia equivalente para n capacitores en paralelo es

$$C_{equi} = C_1 + C_2 + .. . + C_n$$

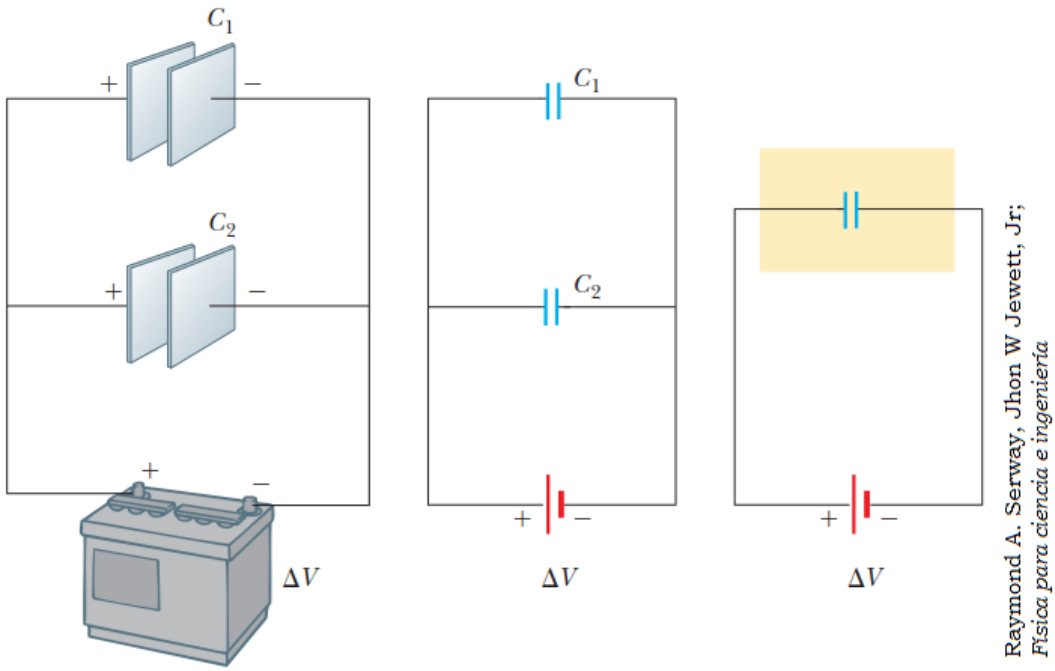


Figura 95. Conexión de capacitores en paralelo

PROBLEMAS RESUELTOS DE CAPACITANCIA

1. En el circuito que se ilustra la figura 96, la capacitancia de cada capacitor es C. La capacitancia equivalente para estos tres capacitores es (Bauer & Westfall, 2011)

   a) $\frac{1}{3}C$ d) $\frac{3}{5}C$

   b) $\frac{2}{3}C$ e) C

   c) $\frac{2}{5}C$ f) $\frac{5}{3}C$

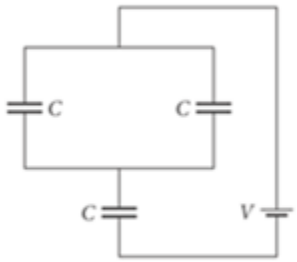


Figura 96

Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. *Física; para ingenierías y ciencias con física moderna*

Solución: El circuito de la figura se puede reducir al circuito de la figura 76, donde C_1 es el capacitor equivalente de dos capacitores en paralelo, esto es

$$C_1 = C + C = 2C$$

Ahora bien, en la figura 76 los capacitores C_1 y C se encuentran en serie y este sistema se puede reducir a un solo capacitor C_2 (Figura 77), el cual sería el capacitor equivalente del sistema inicial

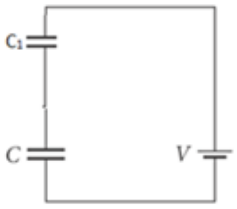


Figura No. 2

Figura 76.

Figura No. 3

Figura 77

Autoría propia

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C} = \frac{1}{2C} + \frac{1}{C}$$

$$C_2 = \frac{2}{3}C$$

De acuerdo con lo anterior la respuesta es la opción b

2. Las placas de un capacitor de placas paralelas con capacitancia C tiene un área A con una distancia d entre ellas. Cuando el capacitor se conecta a una batería de diferencia de potencial V, tiene una carga de magnitud Q sobre sus placas. Mientras el capacitor está conectado a la batería, la distancia entre las placas se reduce por un factor de 3. Entonces, la magnitud de la carga sobre las placas y la capacitancia son (Bauer & Westfall, 2011)

a) $\frac{1}{3}Q\ y\ \frac{1}{3}Q$ b) $\frac{1}{3}Q\ y\ 3Q$ c) $3Q\ y\ 3Q$ d) $3Q\ y\ \frac{1}{3}Q$

Solución: La capacitancia de un capacitor depende de la carga en las placas de este además de la diferencia de potencial entre ellas, esto es:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Además, si el capacitor es un capacitor de placas plano-paralelas se tiene que;

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Donde A, es el área de las placas y d es la separación entre ellas.

Combinando las dos ecuaciones anteriores y despejando para Q se tiene:

$$Q = \frac{\epsilon_0 A}{d} V$$

De esta ecuación de se puede ver que, si la diferencia de potencial se mantiene constante al igual que el área de las placas, la carga en el capacitor es inversamente proporcional a la separación entre ellas, es decir, si la separación disminuye la carga aumenta, por lo tanto, ahora que disminuyo la separación en un factor de tres, la carga aumentara en el mismo factor, es decir, la carga final es tres veces la carga inicial.

De acuerdo con el análisis la respuesta es la opción c

3. La distancia entre las placas de un capacitor de placas paralelas se reduce a la mitad y el área de las placas se duplica. ¿Qué ocurre a la capacitancia? (Bauer & Westfall, 2011)

a) Permanece sin cambio.
b) Se duplica.
c) Se cuadruplica.
d) Se reduce a la mitad.

***Solución*:** Capacitancia para un capacitor de placas plano-paralelas está dada por:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

De acuerdo con la anterior ecuación se tiene que la capacitancia es directamente proporcional al área de las placas e inversamente proporcional a la separación entre ellas. Colocando las condiciones dadas en la anterior ecuación se tiene;

$$C = \frac{\epsilon_0 2A}{\frac{d}{2}} = 4\,\frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Con esto queda que la nueva capacitancia es cuatro veces la capacitancia inicial.

La respuesta es la opción c

4. ¿Cuál de los siguientes capacitores tiene la carga más alta? (Bauer & Westfall, 2011)

a) Un capacitor de placas paralelas con un área de 10 cm^2 y separación de placas de 2 mm, conectado a una batería de 10 V.
b) Un capacitor de placas paralelas con un área de 5 cm^2 y separación de placas de 1 mm, conectado a una batería de 5 V.

c) Un capacitor de placas paralelas con un área de 10 cm^2 y separación de placas de 4 mm, conectado a una batería de 5 V.
d) Un capacitor de placas paralelas con un área de 20 cm^2 y separación de placas de 2 mm, conectado a una batería de 20 V.
e) Todos los capacitores tienen la misma carga.

***Solución*:** La capacitancia de un capacitor de placas plano-paralelas está dada por:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} = \frac{Q}{V}$$

Despejando para la carga almacenada en las placas se tiene:

$$Q = \frac{\epsilon_0 A}{d} V$$

Al reemplazar los valores para cada una de las opciones se tiene: Para que nuestros cálculos sean más fáciles de realizar tomaremos como referencia los valores dados en la opción (a)

$A_a = 10\ cm^2 \qquad d_a = 2\ mm \qquad V_a = 10\ V$

$$Q_a = \frac{\epsilon_0 A_a}{d_a} V_a$$

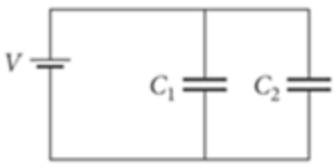
$$Q_b = \frac{\epsilon_0 \, {A_a}/{2}}{{d_a}/{2}} \frac{V_a}{2} = \frac{Q_a}{2}$$

$$Q_c = \frac{\epsilon_0 A_a}{2 d_a} \frac{V_a}{2} = \frac{Q_a}{4}$$

$$Q_d = \frac{\epsilon_0 2A_a}{d_a} 2V_a = 4Q_a$$

De acuerdo con lo anterior se puede concluir que la respuesta correcta es la opción d

5. Dos capacitores de placas paralelas idénticos están conectados en un circuito como muestra la figura 97. Inicialmente el espacio entre las placas de cada capacitor está lleno de aire. ¿Cuál de los siguientes cambios duplicará la cantidad total de carga almacenada sobre ambos capacitores con la misma diferencia de potencial aplicada? (Bauer & Westfall, 2011)



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. *Física; para ingenierías y ciencias con física moderna*

Figura 97.

   a) Llenar el espacio entre las placas de C_1 con vidrio (constante dieléctrica de 4) y dejar C_2 como está.
   b) Llenar el espacio entre las placas de C_1 con teflón (constante dieléctrica de 2) y dejar C_2 como está.
   c) Llenar el espacio entre las placas tanto de C_1 como de C_2 con teflón (constante dieléctrica de 2).
   d) Llenar el espacio entre las placas tanto de C_1 como de C_2 con vidrio (constante dieléctrica de 4).

Solución: Por la definición de capacitancia se tiene que la carga almacenada en un capacitor está dada por:

$$Q = CV$$

Ahora bien, cuando se inserta un dieléctrico entre las placas o armazones de un capacitor su capacitancia aumenta (cambia) en un factor igual al de la constante dieléctrica ***K***, del dieléctrico. Es decir, el nuevo valor de capacitancia es:

$$C = KC_0$$

De donde C_0, es la capacitancia del capacitor sin dieléctrico. De ahí entonces, que si la capacitancia cambia manteniéndose constante la diferencia de potencial

entre las placas del capacitor (nuestro caso), la carga también cambiara en el mismo factor en que cambia la capacitancia.

$$Q = CV = KC_0V = KQ_0$$

Siendo Q_0 la carga en el capacitor cuando no se ha insertado el dieléctrico.

Como los capacitores C_1 y C_2, son idénticos, y están conectados a en paralelo (la diferencia de potencial entre sus placas es la misma), entonces la carga en cada uno de ellos será la misma, lo que marcara la diferencia entre ellos es el tipo de dieléctrico que se inserte entre sus placas, de ahí que habrá mayor carga almacenada en aquel que contenga el dieléctrico cuya constante dieléctrica sea mayor.

De lo anterior la respuesta correcta es la opción C

6. El espacio entre las placas de un capacitor de placas paralelas aislado está lleno por una plancha de material dieléctrico. La magnitud de la carga Q sobre cada placa se mantiene constante. Si el material dieléctrico se retira de su sitio, la energía almacenada en el capacitor (Bauer & Westfall, 2011)

a) Aumenta.
b) Permanece igual.
c) Disminuye
d) Puede aumentar o disminuir

Solución: La energía almacenada en un capacitor está dada por

$$\in = \frac{1}{2}\, CV^2$$

De la definición de capacitancia

$$C = {}^{Q}/_{V}, \qquad V = {}^{Q}/_{C}$$

Se tiene

$$\in = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Cuando hay un dieléctrico entre las placas de un capacitor se tiene que la capacitancia de este cambia(aumenta) comparada con la capacitancia de este cuando no hay nada entre ellas.

Tal como se puede observar la energía almacenada en el capacitor es inversamente proporcional a la capacitancia y directamente proporcional al cuadrado de la carga en las placas. Si la carga permanece constante entonces la energía almacenada solo dependerá de la capacitancia. Dado que la capacitancia del capacitor aumenta cuando este tiene un dieléctrico entre sus placas, ($C = KC_0$ De donce C_0, es la capacitancia del capacitor sin dieléctrico). Se tiene que al ser mayor la capacitancia la energía almacenada es menor; ahora bien, cuando se extrae el dieléctrico la capacitancia disminuye por lo tanto la energía almacenada aumenta.

De acuerdo con lo expuesto la respuesta correcta es la opción (a)

7. ¿Cuál de las siguientes situaciones es proporcional a la capacitancia de un capacitor de placas paralelas? (Bauer & Westfall, 2011)

    a) La carga almacenada sobre cada placa conductora.
    b) La diferencia de potencial entre las dos placas.
    c) La distancia de separación entre las dos placas.
    d) El área de cada placa.
    e) Todas las anteriores.
    f) Ninguna de las anteriores.

Solución: La capacitancia para un capacitor de placas plano-paralelas está dada por

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

De acuerdo con esta ecuación se tiene que la capacitancia es directamente proporcional al área de las placas e inversamente proporcional a la separación entre ellas, lo reciproco también se cumple, es decir, El área de las placas del capacitor es proporcional a la capacitancia $\left(A = \frac{d}{\epsilon_0} C\right)$, así como, a la separación de las placas es inversamente proporcional a la capacitancia $d = \epsilon_0 A \frac{1}{C}$.

De acuerdo con lo anterior la respuesta es la opción d

8. Un dieléctrico con constante dieléctrica κ = 4 se inserta en un capacitor de placas paralelas, ocupando 1/3 del volumen, como muestra la figura 98. Si la capacitancia del capacitor sin el dieléctrico es C, ¿cuál es la capacitancia del capacitor con el dieléctrico? (Bauer & Westfall, 2011)

Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. *Física; para ingenierías y ciencias con física moderna*

Figura 98.

   a) 0.75C
   b) C
   c) 2C
   d) 4C
   e) 6C

Solución: El capacitor ilustrado en la figura 99 se puede dividir en tres capacitores en paralelo, porque la diferencia de potencial es la misma entre sus placas, figura, Dos capacitores entre cuyas placas no existe dieléctrico y uno donde se ha insertado el dieléctrico, el cual ocupa un tercio del volumen total. La división en tres capacitores se hace debido a que en la región donde se introduce el dieléctrico el campo eléctrico se verá modificado por la presencia de este. El arreglo (a) de la figura 98 se puede reordenar quedando (b), los dos

capacitores sin dieléctrico darían uno solo Con dos tercios de su volumen sin dieléctrico (c).

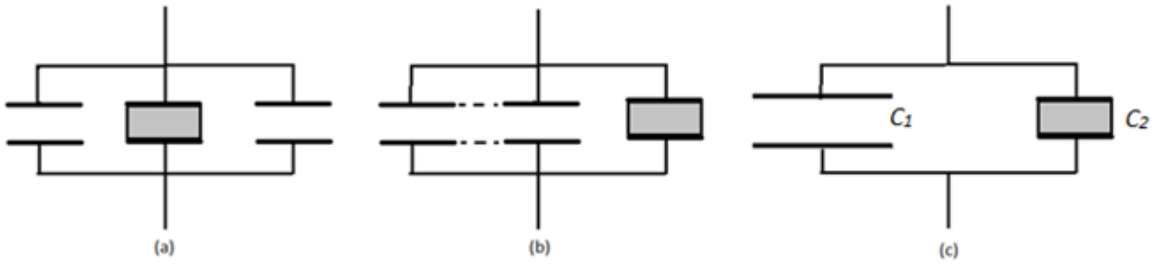


Figura 99.

La capacitancia de un capacitor de placas plano-paralelas es:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Si esta ecuación la multiplicamos arriba y abajo por d (separación entre las placas), podremos expresar la capacitancia del capacitor en términos del volumen que hay entre las placas del capacitor

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}\frac{d}{d} = \frac{\epsilon_0 V_{ol}}{d^2}$$

De donde $V_{ol} = Ad$, es el volumen del espacio entre las placas del capacitor y que estaría disponible para ser ocupado por el dieléctrico.

Ahora bien, si al capacitor se le introduce un dieléctrico la capacitancia de este cambia respecto de la capacitancia cuando no lo hay. La capacitancia de un capacitor con dieléctrico respecto de cuando no lo hay está dada por

$$C = KC_0$$

Donde C_0, es la capacitancia sin dieléctrico.

Con todo lo dicho se tiene que la capacitancia equivalente (total) de la figura c, está dada por

$$C = C_1 + \mathrm{K}C_2$$

$$C = \frac{\epsilon_0 V_{ol-1}}{d^2} + K\frac{\epsilon_0 V_{ol-2}}{d^2}$$

$$C = \frac{2\epsilon_0 V_{ol}}{3d^2} + K\frac{\epsilon_0 V_{ol}}{3d^2}$$

En nuestro caso $K = 4$

$$C = \frac{2\epsilon_0 V_{ol}}{3d^2} + 4\frac{\epsilon_0 V_{ol}}{3d^2}$$

$$C = \frac{2\epsilon_0 V_{ol}}{d^2}$$

$$C = 2C_0$$

De acuerdo con lo anterior ***la respuesta correcta es la opción c***

9. Un capacitor de placas paralelas se conecta a una batería para cargarlo. Luego de algún tiempo, mientras la batería sigue conectada al capacitor, la distancia entre las placas del capacitor se duplica. ¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones es verdadera? (Bauer & Westfall, 2011)

   a) El campo eléctrico entre las placas se reduce a la mitad.
   b) La diferencia de potencial de la batería se reduce a la mitad.
   c) La capacitancia se duplica.
   d) La diferencia de potencial a través de las placas no cambia.
   e) La carga entre las placas no cambia.

Solución: Por definición la capacitancia para el capacitor de placas plano-paralelas es:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Y dado que el campo eléctrico entre las placas es un campo eléctrico uniforme, entonces la diferencia de potencial entre las placas en términos del campo eléctrico sería

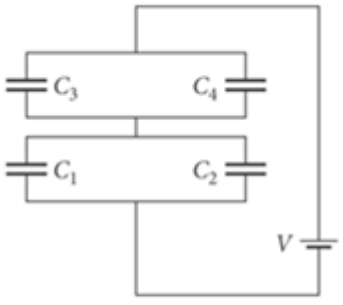
$$V = Ed$$

De la ecuación anterior se puede ver que si la separación de las placas aumenta entonces el campo eléctrico debe disminuir para que el potencial de mantenga constante, por lo tanto, ***la opción a) es correcta***.

La diferencia de potencial en la batería no varía así cambie la separación entre las placas, pues la batería tiene la propiedad de mantener el potencial constante, la opción b) también queda descartada.

Como se puede ver de la definición de capacitancia se puede ver que la capacitancia es inversamente proporcional a la separación entre las placas, es decir, si la separación aumenta la capacitancia disminuye, y si, la sedación disminuye entonces la capacitancia aumenta, por lo tanto, la opción c) no es correcta

10. Con referencia a la figura 100, decida si cada una de las siguientes ecuaciones es falsa o verdadera. Suponga que todos los capacitores tienen diferentes capacitancias. La diferencia de potencial a través del capacitor C_1 es V_1. La diferencia de potencial a través del capacitor C_2 es V_2 . La diferencia de potencial a través del capacitor C_3 es V_3. La diferencia de potencial a través del capacitor C_4 es V_4. La carga almacenada en el capacitor C_1 es q_1. La carga



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. *Física; para ingenierías y ciencias con física moderna*

Figura 100.

almacenada en el capacitor C_2 es q_2. La carga almacenada en el capacitor C_3 es q_3. La carga almacenada en el capacitor C_4 es q_4. (Bauer & Westfall, 2011)

a) $q_1 = q_3$
b) $V_1 + V_2 = V$
c) $q_1 + q_2 = q_3 + q_4$
d) $V_1 + V_2 = V_3 + V_4$
e) $V_1 + V_3 = V$

Solución: De la teoría se sabe que cuando dos capacitores esta conectados en paralelo la diferencia de potencial entre sus placas es la misma y la carga almacenada en cada uno de ellos es diferente, lo contario ocurre cuando están conectados en serie. En serie la carga almacenada es la misma pero la diferencia de potencial entre sus placas es diferente. De acuerdo con el esquema dado se tiene que C_1 y C_2 están en paralelo, al igual que C_3 y C_4.

De acuerdo con lo dicho anteriormente se tiene:

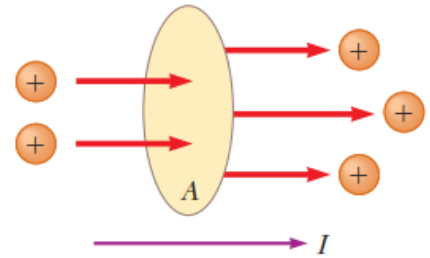
a) Es falsa, pues no están en serie
b) Es falsa, esa suma no da el potencial que me provee la fuente
c) Es verdadera porque la suma de las cargas en los capacitores C_1 y C_2, da la carga del capacitor equivalente de estos dos, lo mismo sucede con C_3 y C_4, los capacitores equivalentes de estos estarían en serie, y como se dijo arriba la carga en los capacitores conectados en serie es la misma.
d) Es falsa, la suma de los potenciales en los capacitores no es la misma, a menos, que estos sean iguales
e) Verdadera, porque en ultimas lo que se esté sumando son las dos diferencias de potencial en dos puntos del circuito que debe dar como resultado el potencial dado por la fuente

CORRIENTE Y RESISTENCIA ELECTRICA

La corriente eléctrica se define como el paso de carga a través de un área determinada, figura 101.

$$I_{promedio} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$$I = \frac{dQ}{dt}$$



Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr;
Física para ciencias e ingeniería

Figura 101.

Las unidades de corriente eléctrica en el sistema internacional de unidades es el amperio (A). Unidad que recibe este nombre en a honor André-Marie Ampère (1775 – 1827) matemático y físico francés.

Definiremos la densidad de corriente como la cantidad por unidad de área, esto es

$$J = \frac{I}{A}$$

La densidad de corriente nos brinda información sobre cuanta corriente fluye por unidad de área en un conductor determinado.

La dirección de la corriente se toma como aquella en la que fluyen las cargas positivas, figura 102.

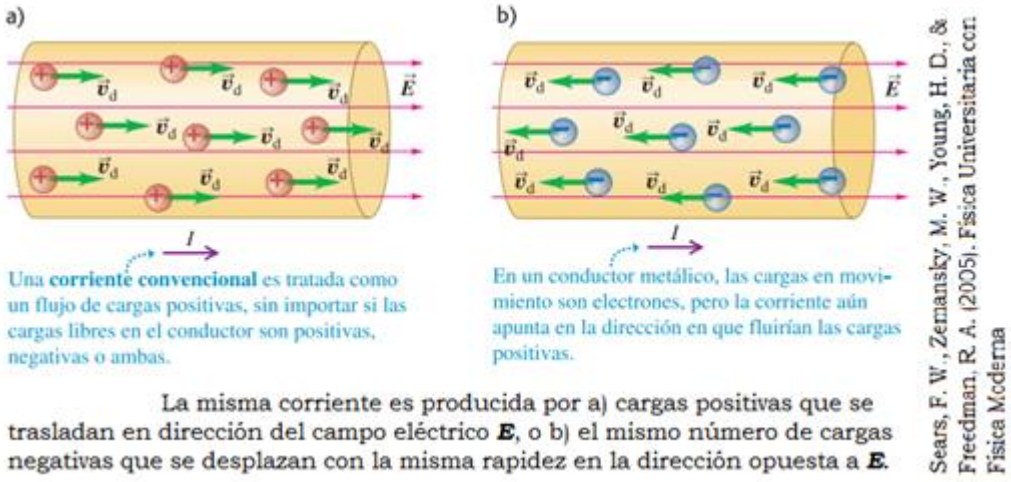


Figura 102.

En un conductor las partículas responsables de la corriente son los electrones. Para que en un conductor haya un flujo neto de carga se necesita que al interior de este se establezca un campo eléctrico, figura XIV.

La relación entre el campo eléctrico responsable de generar el movimiento de cargas (corriente) y la densidad de corriente está dada por la *ley de Ohm*.

$$\vec{E} = \rho \vec{J}$$

De donde $\boldsymbol{\rho}$ es una constante llamada resistividad eléctrica, la cual depende de las propiedades físicas del material.

La resistividad depende de la temperatura del material y está dada por

$$\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

De donde ρ_0 es la resistivida a temperatura ambiente (20 ^{0}C) y α es el coeficiente de temperatura. En la tabla No. 2. Se presentan algunos valores típicos para la resistividad eléctrica, y la tabla No.3. se dan valores α.

Sustancia		$\rho(\Omega \cdot m)$	Sustancia	$\rho(\Omega \cdot m)$
Conductores			**Semiconductores**	
Metales	Plata	1.47×10^{-8}	Carbono puro (grafito)	3.5×10^{-5}
	Cobre	1.72×10^{-8}	Germanio puro	0.60
	Oro	2.44×10^{-8}	Silicio puro	2300
	Aluminio	2.75×10^{-8}	**Aislantes**	
	Tungsteno	5.25×10^{-8}	Ámbar	5×10^{14}
	Acero	20×10^{-8}	Vidrio	10^{10}–10^{14}
	Plomo	22×10^{-8}	Lucita	$>10^{13}$
	Mercurio	95×10^{-8}	Mica	10^{11}–10^{15}
Aleaciones	Manganina (84% Cu, 12% Mn, 4% Ni)	44×10^{-8}	Cuarzo (fundido)	75×10^{16}
	Constantán (60% Cu, 40% Ni)	49×10^{-8}	Azufre	10^{15}
	Nicromel	100×10^{-8}	Teflón	$>10^{13}$
			Madera	10^{8}–10^{11}

Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D., & Freedman, R. A. (2005). Física Universitaria con Física Moderna

Tabla No. 2. Resistividades a temperatura ambiente 20 ^{0}C

Material	$\alpha\,[(°C)^{-1}]$	Material	$\alpha[(°C)^{-1}]$
Aluminio	0.0039	Plomo	0.0043
Latón	0.0020	Manganina	0.00000
Carbono (grafito)	−0.0005	Mercurio	0.00088
Constantán	0.00001	Nicromel	0.0004
Cobre	0.00393	Plata	0.0038
Hierro	0.0050	Tungsteno	0.0045

Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D., & Freedman, R. A. (2005).
Física Universitaria con Física Moderna

Tabla No. 3. Coeficientes de temperatura. Valores aproximados a temperatura ambiente

Otra forma de la ley de expresar la ley de Ohm en pensar que para establecer una corriente en el conductor hay colocar entre los extremos de este una diferencia de potencial V. La corriente que aparece es directamente proporcional a la diferencia de potencial, esto es

$$V\ \alpha\ I$$

$$\boldsymbol{V = IR}$$

De donde $\boldsymbol{R}$, es una constante de proporcionalidad llamada *resistencia eléctrica.* Si se combina las dos expresiones para la ley de Ohm se tiene que

$$\boldsymbol{R = \rho \frac{l}{A}}$$

De donde l es la longitud del conductor y A el área de la sección transversal de este que es atravesada por la corriente.

Si se reemplaza la definición de ρ en la expresión para la resistencia se tiene que esta depende de la temperatura

$$R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

De donde R_0 es la resistencia a temperatura ambiente.

A todos los materiales que siguen la ley de Ohm se les dice que son Óhmicos. Existen algunos materiales cuya resistencia cae abruptamente a cero para un valor típico (critico), estos materiales que no presentan oposición al paso de la corriente se llaman *superconductores*.

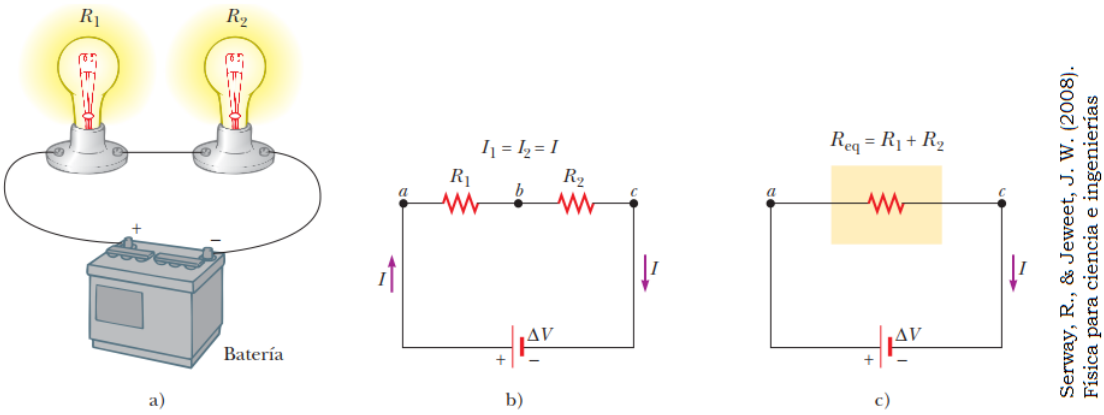
Dado que en su inmensa mayoría todos los materiales presentan oposición al paso de la corriente, por la "*fricción*" de los electrones con la red del material se tiene que toda resistencia eléctrica disipa energía en forma de calor, a este fenómeno se le conoce como *efecto joule*. La potencia disipada por una corriente está dada por

$$\boldsymbol{P = VI}$$

$$\boldsymbol{P = I^2R = \frac{V^2}{R}}$$

De donde V, es la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia e I, la corriente que la atraviesa.

Se tiene que las resistencias al igual que los capacitores también se pueden conectar en serie o en paralelo. Y al igual que los capacitores las redes de resistencias conectadas en serie o paralelo se pueden reducir a una sola resistencia equivalente.



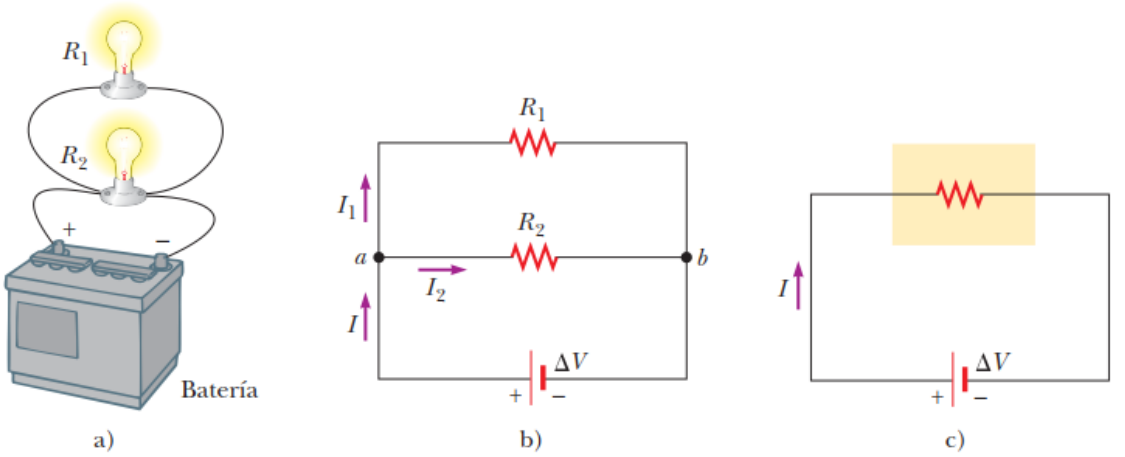
a) Combinación en serie de dos lámparas de resistencias R_1 y R_2. b) Diagrama de circuito para un circuito de dos resistores. La corriente en R_1 es la misma que en R_2. c) Los resistores han sido reemplazados por un solo resistor de resistencia equivalente $R_{eq} = R_1 + R_2$.

Serway, R., & Jeweet, J. W. (2008). Física para ciencia e ingenierías

Figura 103. Resistencias en serie

La resistencia equivalente para n resistencias conectadas en serie es

$$R_{equiv} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$$



a) Combinación en paralelo de dos lámparas con resistencias R_1 y R_2. b) Diagrama de circuito para un circuito de dos resistores. La diferencia de potencial en las terminales de R_1 es la misma que la aplicada a R_2. c) Los resistores han sido reemplazados por un solo resistor de resistencia equivalente

Serway, R., & Jeweet, J. W. (2008). Física para ciencia e ingenierías

Figura 104. Resistencias en paralelo

La resistencia equivalente de n resistencia conectadas en paralelo es

$$\frac{1}{R_{equi}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_3}$$

Un circuito eléctrico es un arreglo donde se combinan diferentes elementos (resistencias, capacitores, etc.) Solucionar un circuito consiste en hallar las corrientes que atraviesan cada elemento, así como las diferencias de potencial en cada uno de ellos, todo esto es de vital importancia en la electrónica. Para solucionar un circuito existen o se tienen dos leyes además de otras estrategias. Estas dos leyes son las *leyes Kirchhoff*.

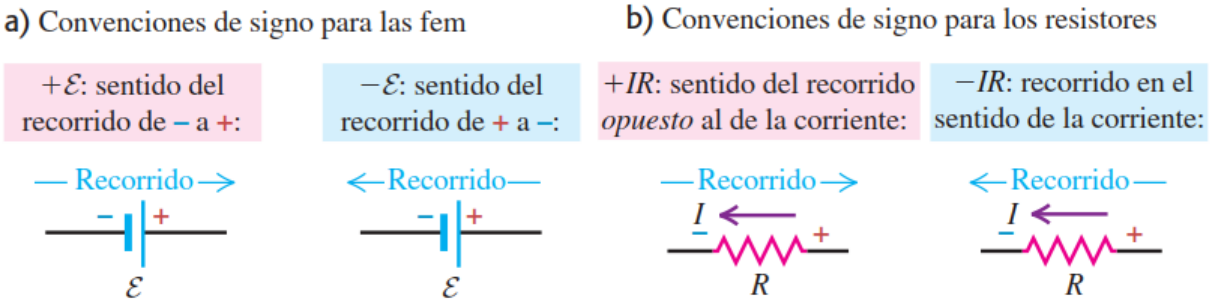
- La suma algebraica de las corrientes en un *nodo* debe ser igual a cero

$$\sum_{nodo} I = 0$$

- La suma de las caídas o elevaciones de potencial en cada uno de los elementos de una *malla* debe ser igual a cero.

$$\sum_{malla} V = 0$$

La figura 86, muestra las convenciones para el uso y aplicación de las reglas de Kirchhoff.



Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D., & Freedman, R. A. (2005). Física Universitaria con Física Moderna

Figura 105. Convenciones para el uso de las reglas de Kirchhoff

PROBLEMAS RESUELTOS DE CORRIENTE Y RESISTENCIA ELECTRICA

1. Si la corriente que pasa por un resistor es aumentada por un factor de 2, ¿cómo afecta este hecho la potencia que se disipa? (Bauer & Westfall, 2011)

   a) Disminuye por un factor de 4.
   b) Aumenta por un factor de 2.
   c) Disminuye por un factor de 8.
   d) Aumenta por un factor de 4.

   Solución: La potencia disipada en un resistor está dada por:

$$P = V * I$$

De acuerdo con la ley de Ohm, $V = I * R$, si reemplazamos en la ecuación para la potencia esta queda

$$P = I^2 * R$$

De esta ecuación se puede concluir que la potencia disipada en una resistencia es directamente proporcional al cuadrado de la corriente que circula por ella, lo anterior quiere decir que si se duplica la corriente la potencia se cuadruplicara, es decir, se ve afectada en un factor de 4. De ahí que ***la respuesta correcta es la opción a).***

2. Usted hace una combinación en paralelo de resistores, que consta de un resistor A, que tiene una resistencia muy elevada, y un resistor B, que tiene una resistencia muy baja. La resistencia equivalente para esta combinación es: (Bauer & Westfall, 2011)

   a) Ligeramente mayor que la resistencia del resistor A.

b) Ligeramente menor que la resistencia del resistor A.

c) Ligeramente mayor que la resistencia del resistor B.

d) Ligeramente menor que la resistencia del resistor B.

Solución: La figura 106 muestra las dos resistencias conectadas en, cuando la corriente llega al nodo C esta trata de irse por los dos caminos; pero se ira mayor cantidad por aquel camino que le

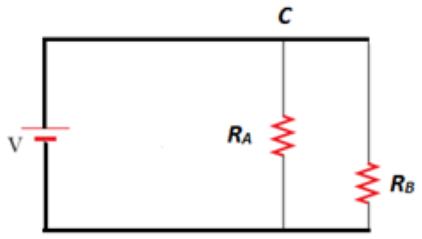


Figura 106. Autoría propia

presente menor resistencia a su paso, es decir, en este caso la mayor cantidad de corriente atravesara la resistencia R_B, la corriente no "vera" la resistencia R_A. De lo anterior se puede concluir que la resistencia equivalente sea básicamente igual a R_B.

De otro lado la resistencia equivalente para dos resistores conectados en paralelo está dada por:

$$\frac{1}{R_{equi}} = \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B}$$

$$R_{equi} = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B}$$

De acuerdo con esta última ecuación se tiene, dado que R_A es mucho mayor que R_B, entonces en el denominador podemos despreciar R_B frente a R_A, con lo cual

se tendría que la resistencia equivalente seria ligeramente menor que R_B, por lo tanto, la ***respuesta correcta es la opción d).***

3. Dos alambres cilíndricos, 1 y 2, hechos del mismo material, tienen la misma resistencia. Si la longitud del alambre 2 es el doble de la longitud del alambre 1, ¿cuál es la razón de las áreas de sus secciones transversales, A 1 y A 2? (Bauer & Westfall, 2011)

a) $A_1 / A_2 = 2$

b) $A_1 / A_2 = 4$

c) $A_1 / A_2 = 0.5$

d) $A_1 / A_2 = 0.25$

Solución: La resistencia para un material conductor esta dad por:

$$R = \frac{\rho\, l}{A}$$

De donde ρ, es la resistividad del material,l la longitud y A, el área de la sección transversal. Dado que los dos alambres tienen la misma resistencia y son del mismo material se tiene:

$$R_1 = R_2$$

$$\frac{\rho l_1}{A_1} = \frac{\rho l_2}{A_2}$$

$$\frac{\rho l_1}{A_1} = \frac{\rho 2 l_1}{A_2}$$

$$\frac{1}{A_1} = \frac{2}{A_2}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{2}$$

De acuerdo con lo obtenido **la respuesta correcta es la opción c)**

4. Las tres bombillas en el circuito mostrado en la figura 88, son idénticas. ¿Cuál de las tres brilla más? (Bauer & Westfall, 2011)

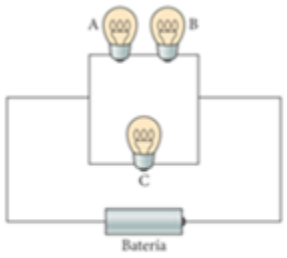
   a) A

   b) B

   c) C

   d) A y B

   e) Las tres brillan igual.



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. *Física; para ingenierías y ciencias con física moderna*

Figura 107

Solución: La bombilla que alumbra más es aquella en la que hay mayor corriente atravesándola, las bombillas A y B son atravesadas por la misma corriente, pero estar dos bombillas constituyen dos resistencias en serie, por lo tanto, la resistencia equivalente de estos dos bombillos seria ***2R***, si aplicamos la ley de Ohm a esta resistencia equivalente

$$V = IR = I * 2R$$

Entonces la corriente que las recorre es

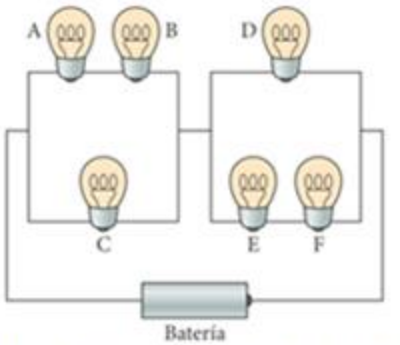
$$I_{A-B} = \frac{V}{2R}$$

Para la bombilla C seria:

$$I_c = \frac{V}{R}$$

Dado que la diferencia de potencial es la misma se tiene que hay mayor en C, de acuerdo con esto ***la respuesta correcta es la opción c)***

5. Las seis bombillas del circuito ilustrado en la figura 108, son idénticas. ¿Cuál de los siguientes ordenamientos expresa la brillantez relativa de las bombillas? (Sugerencia: ¡Mientras más corriente pasa por una bombilla, más brillante es!) (Bauer & Westfall, 2011)



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. *Física; para ingenierías y ciencias con física moderna*

Figura 108.

a) A = B > C = D > E = F

b) A = B = E = F > C = D

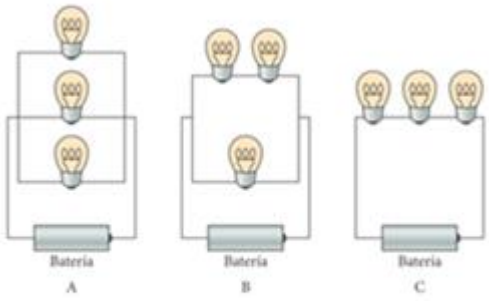
c) C = D > A = B = E = F

d) A = B = C = D = E = F

Solución: Dado que la(s) bombilla(s) que brille (an) más es (son) aquella(s) que son atravesadas por una corriente mayor, dada la simetría de la figura se tiene que la diferencia de potencial en cada parte es la misma y teniendo como base que las bombillas se "comportan" como unas resistencias en la figura se pueden observar que hay en cada sección hay dos resistencias en serie (A, B y E, F) por lo tanto estas dos resistencias (bombillas) son atravesadas por la misma corriente pero una corriente menor que atraviesa a la bombilla que está sola (C o D) dado que la resistencia equivalente es mayor, y la corriente es inversa a la resistencia, es decir, se ira mayor cantidad de corriente por donde haya menos resistencia al paso de esta y esto es por las bombillas C y D, por lo tanto, la ***respuesta correcta es la opción C)***.

6. ¿Cuál de las siguientes disposiciones de tres bombillas idénticas, mostradas en la figura 109, extrae más corriente de la batería? (Bauer & Westfall, 2011)

a) A
b) B
c) C
d) Las tres extraen la misma corriente.
e) A y C extraen la mayor cantidad de corriente.



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. *Física; para ingenierías y ciencias con física moderna*

Figura 109

Solución: Por ley de Ohm $\left(I = {}^{V}/_{R}\right)$, la disposicion que extrae mayor corriente es aquella cuya resistencia equivalente es menor, por lo tanto, se procederá a hallar la resistencia equivalente para cada configuración. Como las bombillas son idénticas y se pueden considerar como resistencias, entonces

La configuración A presenta tres resistencias paralelo, entonces

$$\frac{1}{R_{equ-A}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}$$

$$R_{equ-A} = \frac{R}{3}$$

La configuración B tiene dos resistencias en serie y estas dos están en paralelo con otra resistencia. Entonces la resistencia equivalente para las dos en serie es:

$$R_{equ} = R + R$$

$$R_{equ} = 2R$$

La resistencia equivalente para el circuito B es:

$$\frac{1}{R_{equ-B}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R}$$

$$R_{equ-B} = \frac{2R}{3}$$

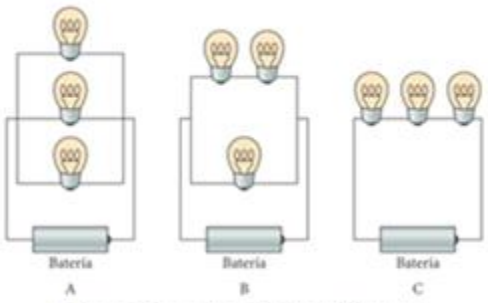
El circuito C tiene tres resistencias en serie, la resistencia equivalente de este circuito es:

$$R_{equ-C} = R + R + R$$

$$R_{equ-C} = 3R$$

De las respuestas se puede ver que el circuito que tiene menor resistencia es el A, por lo tanto, es el circuito que mayor corriente demanda de la batería, ***la respuesta correcta es la opción a).***

7. ¿Cuál de las siguientes disposiciones de tres bombillas idénticas, mostradas en la figura 110, tiene la resistencia más alta? (Bauer & Westfall, 2011)



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. *Física; para ingenierías y ciencias con física moderna*

Figura110

a) A

b) B

c) C

d) Las tres tienen la misma resistencia.

e) A y C están cerca de tener la mayor resistencia.

Solución: Viendo los bombillos como resistencias, entonces debemos hallar la resistencia equivalente de cada circuito

La configuración A presenta tres resistencias paralelo, entonces

$$\frac{1}{R_{equ-A}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}$$

$$R_{equ-A} = \frac{R}{3}$$

La configuración B tiene dos resistencias en serie y estas dos están en paralelo con la otra resistencia. Entonces la resistencia equivalente para las dos en serie es:

$$R_{equ} = R + R$$

$$R_{equ} = 2R$$

La resistencia equivalente para el circuito B es:

$$\frac{1}{R_{equ-B}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R}$$

$$R_{equ-B} = \frac{2R}{3}$$

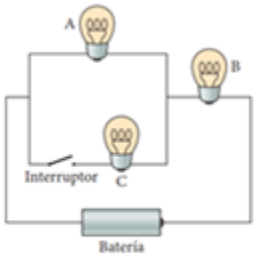
El circuito C tiene tres resistencias en serie, la resistencia equivalente de este circuito es:

$$R_{equ-C} = R + R + R$$

$$R_{equ-C} = 3R$$

De acuerdo con las respuestas obtenidas se puede concluir que la configuración que tiene la resistencia más alta es la C. Entonces la ***respuesta correcta es la opción c)***.

8. Tres bombillas idénticas están conectadas como se muestra en la figura 111. Inicialmente, el interruptor está cerrado. Cuando el interruptor se abre (como se ilustra en la figura), la bombilla C se apaga. ¿Qué ocurre con las bombillas A y B? (Bauer & Westfall, 2011)



Wolfgang Bauer, Gary D. Westfall. *Física; para ingenierías y ciencias con física moderna*

Figura 111.

a) La bombilla A se hace más brillante y la bombilla B se hace más tenue.
b) Las bombillas A y B se hacen más brillantes.
c) Las bombillas A y B se hacen más tenues.
d) La bombilla A se vuelve más tenue y la bombilla B se hace más brillante.

Solución: Al abrir el interruptor se suspende el paso de corriente por la bombilla C, lo que hace que haya más corriente por las bombillas A y B que están serie

por lo tanto la corriente que las atraviesa son la misma lo que hace que las dos aumenten su brillo, lo que quiere decir que ***la respuesta correcta es la opción b)***.

9. ¿Por cuál de los siguientes alambres fluye la mayor cantidad de corriente? (Bauer & Westfall, 2011)

   a) Un alambre de cobre de 1 m de largo y diámetro 1 mm conectado a una batería de 10 V.

   b) Un alambre de cobre de 0.5 m de largo y diámetro 0.5 mm conectado a una batería de 5 V.

   c) Un alambre de cobre de 2 m de largo y diámetro 2 mm conectado a una batería de 20 V.

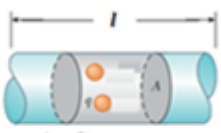
   d) Un alambre de cobre de 1 m de largo y diámetro 0.5 mm conectado a una batería de 5 V.

   e) Por todos los alambres circula la misma corriente.

Solución: Todo material conductor tiene una resistencia eléctrica, y esta está dada por

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

De donde, ρ, es la resistividad del material, l, longitud y A, el área de la sección trasversal que es atravesada por la corriente.



Raymond A. Serway, Jhon W Jewett, Jr;
Física para ciencia e ingeniería

Figura 112.

Entonces si consideramos un trozo de material conductor conectado a una diferencia de potencial V, y aplicamos la ley de Ohm se tiene:

$$V = RI = \frac{\rho l}{A} I$$

Despejando para la corriente:

$$I = V \frac{A}{\rho l}$$

Si nuestro material es un cilindro, se tiene que el área de la sección transversal en términos de su diámetro, (Φ) es

$$A = \frac{\pi \emptyset^2}{4}$$

Reemplazando en la expresión para la corriente

$$I = V \frac{\pi \emptyset^2}{4\rho l}$$

Si reemplazamos los valores dados para cada una de las opciones se tiene:

$$I_a = 2.5 * 10^{-6} \frac{\pi}{\rho}$$

$$I_b = 1.25 * 10^{-6} \frac{\pi}{\rho}$$

$$I_c = 1 * 10^{-5} \frac{\pi}{\rho}$$

$$I_d = 3.125 * 10^{-7} \frac{\pi}{\rho}$$

De las respuestas anteriores se puede observar que ***la respuesta correcta es la opción c)***

10. La ley de Ohm establece que la diferencia de potencial a través de un dispositivo es igual a: (Bauer & Westfall, 2011)

a) La corriente que fluye el dispositivo multiplicada por la resistencia del dispositivo.
b) La corriente que fluye a través del dispositivo dividida entre la resistencia del dispositivo.
c) La resistencia del dispositivo dividida entre la corriente que fluye por el dispositivo.
d) La corriente que fluye por el dispositivo multiplicada por el área de la sección transversal del dispositivo.
e) La corriente que fluye por el dispositivo multiplicada por la longitud del dispositivo.

Solución: La ley de Ohm establece que la diferencia de potencial en un dispositivo electrónico es directamente proporcional a la corriente que lo atraviesa, donde la constante de proporcionalidad entre el potencial y la corriente es la resistencia del dispositivo, esto es:

$$V = IR$$

De acuerdo con lo anterior ***la respuesta correcta es la opción a***.

11. Dentro de un semiconductor se mantiene un campo eléctrico. Cuando disminuye la temperatura, la magnitud de la densidad de corriente dentro del semiconductor (Bauer & Westfall, 2011)

a) aumenta.

b) permanece igual.

c) disminuye.

d) puede aumentar o disminuir.

Solución: La resistencia de un semiconductor varia de manera muy compleja con la temperatura, esta puede aumentar o disminuir dependiendo del conductor, lo cual conlleva a que la corriente también pueda aumentar o disminuir, es decir, todo depende de la naturaleza del dieléctrico, por lo anterior ***la respuesta más acertada es la opción d***.

12. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta? (Bauer & Westfall, 2011)

a) Las corrientes que circulan por dispositivos electrónicos conectados en serie son iguales.
b) Las caídas de potencial a través de dispositivos electrónicos conectados en paralelo son iguales.
c) A través de la menor resistencia circula más corriente cuando dos resistores están en una conexión en paralelo.
d) A través de la menor resistencia circula más corriente cuando dos resistores están en una conexión en serie.

Solución:

- La Opción a) es cierta puesto que cuando una corriente circula por dispositivos que están conectados en serie no tiene por donde desviarse por lo tanto el flujo de carga es el mismo.
- La opción b) es correcta pues esto es un requisito para considera dispositivos conectados en paralelo.

- Cuando la corriente llega a un camino que presenta bifurcaciones (el caso de dispositivos conectados en paralelo), fluirá mayor activad de corriente por aquel camino que presente menor oposición (resistencia) a su paso, por lo tanto, la opción c) es verdadera.
- La opción d) contradice el hecho de que dispositivos conectados en serie son atravesados por la misma corriente, por lo tanto, esta opción es falsa

Referencias

Walker, J., Halliday, D., & Resnick, R. (2014). *Fundamentals of physics.* Rosewood Drive: Wiley.

Walker, J., Halliday, D., & Resnick, R. (2014). *Fundamentals of physics.* Wiley.

Weber, H. J., & Arfken, G. B. (2003). *Essential Mathematical Methods for Physicists.* Orlando: Academic Press.

Bauer, W., & Westfall, G. D. (2011). *Física para ingenierias y ciencias.* México, D.F.: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

Doria Andrade, J. G., & Rivera Berrío, J. G. (2018). *Proyectodescartes.org.* Obtenido de https://proyectodescartes.org/iCartesiLibri/materiales_didacticos/Fisica_II/imagenes/76.png

Fernández , J. L., & Coronado, G. (Abril de 2013). *FISICALAB*. Obtenido de https://www.fisicalab.com/apartado/frente-de-onda

GIANCOLI, C., D. (2009). *FÍSICA 1. Principios con aplicaciones. Sexta edición.* México: PEARSON EDUCACIÓN.

Giancoli, D. (2008). *fisica para ciencias e ingenieria con fisica moderna.* Mexico: Pearson Prentice Hall.

GIANCOLI, D. C. (2009). *FÍSICA 2. Principios con aplicaciones. Sexta edición.* México: PEARSON.

KREYSZIG, E. (2011). *ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS.* Nueva Jersey: JOHN WILEY & SONS, INC.

Pérez León, E. (16 de NOVIEMBRE de 2016). *PAIDEIAEDUCATION*. Obtenido de http://paideiaeducation.blogspot.com/2016/11/quien-tiene-la-razon-murcielago-o.html

Purcell, E. J., Varberg, D., & Rigdon, S. E. (2007). *Cálculo.* México D.F: PEARSON EDUCACIÓN.

Raimond A. Serway - John W. Jewett, J. (2009). *Fisica para ciencias e ingenierias con Física moderna.* Mexico: Cengage Learning.

Serway, R. A., & Jewett, Jr, J. W. (2008). *Física para ciencias e ingeniería.* Mexico, D.F.: Cengage Learning Editores,.

Serway, R. A., & Jewett, Jr., J. W. (2018). *Física para ciencias e ingeniería.* Mexico: CENGAGE.

Serway, R. A., & Jewett, jr, J. W. (2019). *Fisica para ciencias e ingenirias* (Vol. 1). Ciudad de México: CENGAGE.

Serway, R. A., & Jewett, Jr., J. W. (2019). *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics.* Boston: Cengage Learning Editores, S. A.

Tipler, P. A., & Mosca, G. (2010). *Física para la ciencia y la tecnología. Electricidad y magnetismo/Lu.* Barelona: REVERTÉ.

Westfall, w. B. (2011). *Fisica para ingenieria y ciencias con fisica moderna.* Mexico: Mc Graw Hill.

Wolfgang, B. .., & Westfall, G. (2011). *Física para ingeniería y ciencias.* Mexico: McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES.

YOUNG, H. D., & FREEDMAN, R. A. (2009). *Física universitaria.* Mexico, D.F.: PEARSON EDUCACIÓN.

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2013). *Física universitaria con física moderna volumen 2.* México: PEARSON.

YOUNG, H. D., & FREEDMAN, R. A. (2013). *Física universitaria con física moderna volumen 2.* México: PEARSON.

YOUNG, H. D., & FREEDMAN, R. A. (2013). *Física universitaria volumen 1. 13ª edición* (Vol. 1). México: PEARSON.

YOUNG,, H. D., & FREEDMAN, R. A. (2014). *Sears and Zemansky's University Physics University Physics Technology Update,* (13 ed., Vol. 2). Edinburgh Gate, England: PEARSON.