CARTILLA DE FÍSICA II - VOL. I

Problemas resueltos de fluidos, oscilaciones mecánicas, ondas mecánicas y física térmica

CARTILLA DE FISICA II - VOL I

Problemas resueltos de fluidos, oscilaciones mecánicas, ondas mecánicas y física térmica

25 DE MAYO DE 2021
ESCUELA MILITAR DE AVIACIÓN MARCO FIDEL SUÁREZ
www.emavi.du.co

"Dos cosas son infinitas: el universo y la estupidez humana; de lo primero no estoy seguro".

Albert Einstein

Presentación

El siguiente material tiene como fin servir de apoyo a los cadetes de la Escuela Militar de Aviación Marco Fidel Suarez en la asignatura de Física 2. Es un repositorio de problemas resueltos, (con una breve presentación de la teoría de los temas tratados en el curso, que en ningún momento pretende sustituir el texto guía, que solo se busca realizar un breve repaso rápido de los conceptos las importantes explicados por el profesor en las diferentes clases) que van a ampliar la gama de problemas solucionados por el docente en la asignatura.

Espero este material cumpla con el fin propuesto. Cualquier duda o inquietud por favor manifestarla, pues esta es una primera versión que necesita ser revisada

Jorge Eliecer Murillo Ballesteros

Docente de Física

Índice

FLUIDOS

Fundamentos teóricos

Lo que se ha aprendido desde la escuela elemental y de la experiencia propia es que la materia se presenta en tres estados: Solido, líquido y gaseoso. Los sólidos se caracterizan por tener una forma definida y un volumen fijo. Los líquidos, tienen un volumen definido, pero no una forma definida; pues estos toman la forma del recipiente que los contiene. Los gases se caracterizan por no tener ni un volumen ni una forma definida, pues estos tienden a ocupar todo el espacio disponible y a adoptar la forma del recipiente que los contiene.

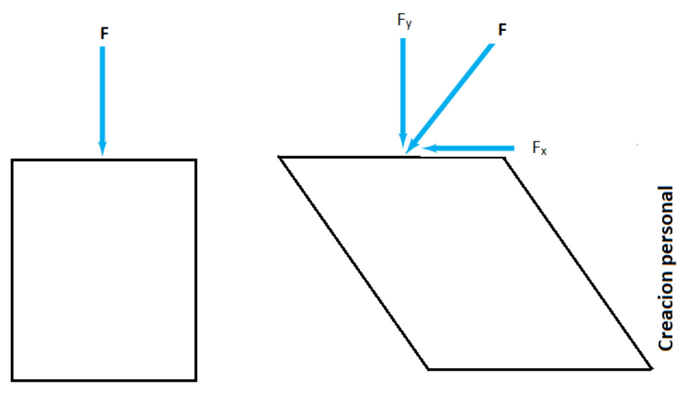


Figura 1.

De lo dicho anteriormente surge la pregunta: ¿Qué es lo que hace que los sólidos tengan forma y volumen definido, y no ocurra lo mismo con los líquidos y los gases? La respuesta a esta pregunta surge de estudiar la estructura molecular de lo que están "hechos" cada uno de estos estados. Podemos decir que en los sólidos las moléculas están muy próximas entre sí, y la fuerza entre ellas es extremadamente grande de ahí que a un sólido le sea muy difícil cambiar su forma. En los sólidos podemos decir que estas moléculas se organizan o de distribuyen en "planos". La fuerza entre un plano y otro es grande, lo cual no permite que haya desplazamiento entre un plano y su adyacente. En los líquidos, las fuerzas intermoleculares también son grandes, pero la fuerza entre planos adyacentes es pequeña, lo que permite un deslizamiento entre planos y así el fluido pueda fluir, ocupar o tener un volumen definido, pero no una forma definida. Una imagen o representación de un fluido sería un montón de hojas apiladas. Si a esta pila de hojas se le aplica una fuerza vertical las hojas (planos) se acercan entre sí, es decir, comprime un poco el fluido, pero si se le aplica una fuerza inclinada la componente horizontal, F_x, tendera a desplazar los planos, tal como se ilustra en la figura 1. Lo que quiere decir esto es que los fluidos no "soportan" fuerzas tangenciales pues estas son las responsables de hacerlos fluir.

Los Fluidos pueden estar en reposo o en movimiento. Si están en reposo la rama de la física que los estudia es la hidrostática.

La presión al interior de un fluido está dada por la ecuación:

$$\boldsymbol{P = P_0 + \rho_{fluido} g h}$$

De donde

P_0: Presión sobre la superficie del fluido

ρ_{fluido}: Densidad del fluido

g: La aceleración de la gravedad

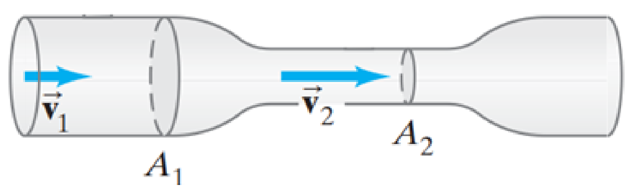
h: profundidad a la cual deseamos conocer la presión.

Ahora bien, cuando un fluido encerrado en un recipiente es sometido a un cambio de presión, este cambio se transmite de igual manera a todos los puntos del fluido, lo anterior se conoce como *principio de Pascal* y es lo que sustenta el funcionamiento de dispositivos como: La prensa hidráulica, los frenos hidráulicos, etc.

De otro lado, cuando hemos ido a una piscina hemos experimentado que cuando levantamos un objeto que está sumergido o cargamos a una persona, estos parecen pesar menos. Lo anterior se puede explicar por el *principio de Arquímedes,* que establece: *"Todo cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido experimenta una fuerza de empuje o fuerza de flotación (fuerza hacia arriba), o pérdida de peso, que es igual al peso del fluido desalojado por el cuerpo".* (Bauer & Westfall, 2011) Lo anterior se expresa como:

$$\boldsymbol{F_{empuje}} = \boldsymbol{m_{fluido}} * \boldsymbol{g}$$

Los fluidos en movimiento los estudia la hidrodinámica. Cuando un fluido de mueve por una tubería y en esta existe un cambio de sección con áreas A_1 y A_2, Figura 2, se tiene que por conservación de la masa (la cantidad de fluido que pasa de una sección a otra debe ser la misma en el mismo tiempo). Lo que quiere decir esto es que el flujo (descarga) Φ se conserva, lo cual, con lleva a que la



Tomado de Douglas de Douglas Giancoli 4ed

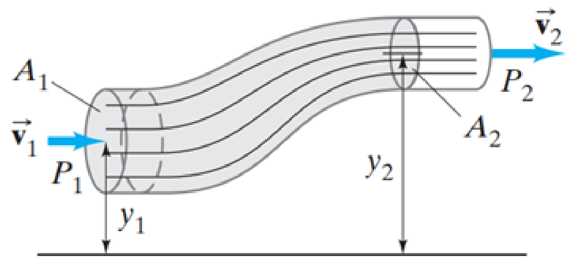
Figura 2.

velocidad aumente o disminuya según sea el caso, la ecuación que rige lo dicho es la ecuación de continuidad

$$\Phi_1 = \Phi_2$$

$$\boldsymbol{A_1 v_1 = A_2 v_2}$$

La ecuación de Bernoulli, que se fundamenta en el principio de conservación de la energía, estudia o describe lo que sucede cuando un fluido se mueve por una tubería en "general", figura 3. con cambios de altura y estrecheces.



Tomado de Douglas de Douglas Giancoli 4ed

Figura 3

$$\boldsymbol{P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2}$$

Aunque sea ha dicho anteriormente que la ecuación de Bernoulli es aplicable a los fluidos que se mueven en un tubo, esto no es del todo cierto, pues esta ecuación se aplica a todos los fluidos en movimiento y con esta ecuación es la base y sustento de la aerodinámica.

Cabe aclarar que los fluidos que aquí estudiamos son fluidos ideales. Los fluidos ideales son aquellos que presentan flujo laminar y no turbulento, además de no presentar viscosidad o cuya viscosidad es muy baja de tal manera que no se tiene en cuenta la perdida de energía por fricción entre sus planos.

PROBLEMAS RESUELTOS DE FLUIDOS

1. El agua salada tiene una densidad mayor que el agua dulce. Un bote flota tanto en el agua dulce como en el agua salada. La fuerza de flotación sobre el bote en el agua salada es ___________ que en el agua dulce. (Bauer & Westfall, 2011)

   a) Igual b) menor c) mayor

Solución: En la figura 4. se ilustran las dos situaciones, como se puede ver las fuerzas que actúan sobre el bote son las mismas, fuerza de flotación hacia arriba y el peso hacia abajo. Dado que el peso del bote no cambia, es decir, es el mismo en ambas situaciones, y, puesto que el bote se encuentra en equilibrio se tiene que en ambos casos la fuerza de flotación es igual al peso del bote, por lo tanto, ***la respuesta correcta es la opción a***.

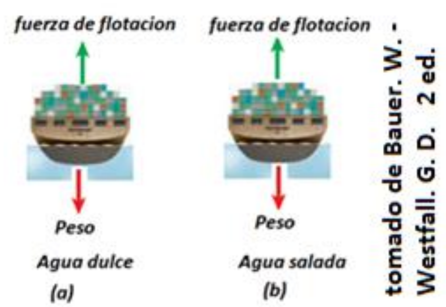


Figura 4.

2. Usted llena un vaso alto con hielo y entonces agrega agua hasta el nivel del borde del vaso, de tal suerte que alguna parte del hielo flota sobre el borde. Cuando se derrite el hielo, ¿qué pasa con el nivel del agua? (Desprecie la

evaporación y suponga que el hielo y el agua permanecen a 0 °C mientras el hielo se derrite.) (Bauer & Westfall, 2011)

a) El agua se derrama por los bordes.

b) El nivel del agua cae por debajo del borde.

c) El nivel del agua permanece a nivel del borde.

d) Depende de la diferencia de la densidad entre el agua y el hielo.

Solución: El hielo en el vaso está ocupando un volumen, cuando este hielo se derrite el agua proveniente del hielo pasa a ocupar el espacio que dejo este, por lo tanto, el nivel del agua en el vaso no cambia, lo cual quiere decir que ***la respuesta correcta es la opción c***.

3. La figura 5, muestra cuatro tanques abiertos idénticos, llenos hasta el borde con agua y puestos en una báscula. Unas bolas flotan en los tanques (2) y (3), pero un objeto se hunde hasta el fondo del tanque (4). ¿Cuál de los siguientes ordenan correctamente los pesos mostrados en las básculas? (Bauer & Westfall, 2011)

Tomado de Douglas de Douglas Giancoli 4ed

Figura 5.

a) $(1) < (2) < (3) < (4)$

b) $(1) < (2) = (3) < (4)$

c) $(1) < (2) = (3) = (4)$

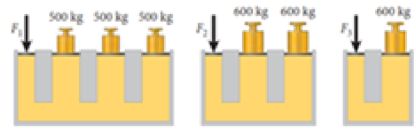
d) $(1) = (2) = (3) < (4)$

Solución: De las figuras se puede concluir que la balanza tendrá menor lectura en la situación (1), dado que solo leerá el peso del recipiente con el agua y dará una mayor lectura en el caso (4), puesto que aquí el objeto descansa sobre el fondo del recipiente, por lo tanto, la lectura de la balanza será el peso del recipiente, peso del agua más el peso del objeto. Ahora bien, en las situaciones (2) y (3), la balanza no registrará el peso de la bola puesto que esta se encuentra flotando, por lo tanto, ***la respuesta correcta es la opción d***.

4. Se encuentra en un bote lleno con grandes piedras a la mitad de un estanque pequeño. Usted comienza a tirar las piedras al agua. ¿Qué le pasa al nivel del agua del estanque? (Bauer & Westfall, 2011)
   a) Sube.
   b) Baja.
   c) No cambia.
   d) Sube momentáneamente y luego baja cuando las piedras llegan al fondo.
   e) No hay suficiente información para decidir.

Solución: El nivel des estanque desciende puesto que al sacar las rocas del bote este pierde peso y por lo tanto la fuerza de empuje disminuye, al arrojar la roca al estanque el nivel de este debería subir, pero no lo hace dado que el volumen de fluido desplazado por el bote es mayor que el volumen de la roca, lo tanto, se tiene que el nivel descenderá, lo que quiere decir que ***la respuesta correcta es la opción b***.

5. Ordene jerárquicamente, de mayor a menor, las magnitudes de las fuerzas F_1, F_2 y F_3 requeridas para equilibrar las masas mostradas en la figura. (Bauer & Westfall, 2011)



tomado de Bauer. W. - Westfall. G. D. 2 ed.

Figura 6

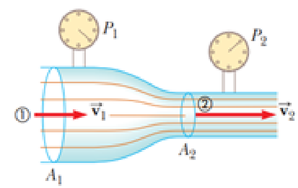
Solución: El principio de Pascal establece que: *cuando un fluido es sometido a un cambio de presión, este cambio se propaga de igual manera a todos los puntos del fluido*. De acuerdo con esto si suponemos que las áreas de los pistones son iguales entonces la fuerza que se hace para sostener los cilindros de 600 kg, es mayor que la que se hace para sostener los de 500 kg. No interesa si hay dos, tres o más pesos, en cada parte la presión será la misma. ***Por lo tanto, la respuesta es: $F_1 < F_2 = F_3$.***

6. En una tubería horizontal de agua que se estrecha a un radio menor, la velocidad del agua en la sección con el radio menor será mayor. ¿Qué pasa con la presión? (Bauer & Westfall, 2011)
   a) La presión será la misma tanto en la sección más ancha como en la más angosta de la tubería.
   b) La presión será mayor en la sección más estrecha de la tubería.

c) La presión será mayor en la sección más ancha de la tubería.

d) Es imposible decir.

Solución: Por la ecuación de continuidad se tiene que la velocidad en la sección más angosta (2) debe ser mayor, ya que el flujo másico debe ser el mismo en cualquier parte de la tubería, por lo tanto, la $V_2 > V_1$. Ahora bien, la velocidad y la presión son inversas, es decir, en aquellos puntos donde la velocidad es mayor la presión será menor a la que hay en los puntos donde la velocidad es menor. Lo anterior se sustenta por la ecuación de Bernoulli. Lo que significa que $P_1 > P_2$. Entonces se tiene que ***la respuesta correcta es la opción es la c***.



Tomado de Douglas de Douglas Giancoli 4ed

Figura 7

7. En una de las películas de Star Wars ™© cuatro de los héroes quedan atrapados en un compactador de basura de la Estrella de la Muerte. Las paredes del compactador comienzan a acercarse y los héroes necesitan escoger un objeto de entre la basura para colocarlo entre las paredes que se acercan para detenerlas. Todos los objetos tienen la misma longitud y la misma sección transversal circular, pero sus diámetros y composiciones son diferentes. Suponga que cada objeto está orientado horizontalmente y no se dobla.

tomado de Bauer. W. - Westfall. G. D. 2 ed.

Figura 8

Tienen el tiempo y la fuerza para sostener sólo uno de estos objetos entre las paredes. ¿Cuál de los objetos mostrados en la figura servirá mejor, esto es, resistirá la mayor fuerza por unidad de compresión? (Bauer & Westfall, 2011)

Solución: El material que resistirá más es aquel que tenga mayor módulo de comprensibilidad (el inverso del módulo del módulo volumétrico). A continuación, se listará una tabla que contiene estos valores.

Tabla 1. Modulo de Young y de elasticidad

Valores representativos para módulos elásticos

Sustancia	Módulo de Young (N/m^2)	Módulo de corte (N/m^2)	Módulo volumétrico (N/m^2)
Tungsteno	35×10^{10}	14×10^{10}	20×10^{10}
Acero	20×10^{10}	8.4×10^{10}	6×10^{10}
Cobre	11×10^{10}	4.2×10^{10}	14×10^{10}
Latón	9.5×10^{10}	3.5×10^{10}	6.1×10^{10}
Aluminio	7.0×10^{10}	2.5×10^{10}	7.0×10^{10}
Vidrio	$6.5–7.8 \times 10^{10}$	$2.6–3.2 \times 10^{10}$	$5.0–5.5 \times 10^{10}$
Cuarzo	5.6×10^{10}	2.6×10^{10}	2.7×10^{10}
Agua	—	—	0.21×10^{10}
Mercurio	—	—	2.8×10^{10}

tomado de Bauer. W. Westfall. G. D. 2 ed.

Por la definición del módulo de comprensibilidad, este será mayor entre más pequeño sea el módulo volumétrico, comparando los valores de los materiales dados se puede concluir que ***la respuesta correcta es la opción d***.

8. Muchos altímetros determinan los cambios de altura midiendo los cambios en la presión atmosférica. Un altímetro que está diseñado para ser capaz de detectar cambios de altitud de 100 m cerca del nivel del mar debería ser capaz de detectar cambios de (Bauer & Westfall, 2011)
   a) aproximadamente 1 Pa.
   b) aproximadamente 10 Pa.
   c) aproximadamente 100 Pa.
   d) aproximadamente 1 kPa.
   e) aproximadamente 10 kPa.

Solución: La precisión de este altímetro estará dada por el rango de alturas en las que puede medir la presión hidrostática o manométrica. La expresión para medirla es

$$\Delta P = \rho g * \Delta h$$

De donde ρ es la densidad del aire (supongámosla constante) y g, la gravedad. Reemplazando los valores correspondientes en la ecuación se tiene

$$\Delta P = 1.29 \frac{kg}{m^3} * 9.8 \frac{m}{s^2} * 100\, m$$

$$\boldsymbol{\Delta P = 1264.2 \frac{N}{m^2} = 1.26\, kPa}$$

De acuerdo al resultado se tiene que ***la respuesta correcta es la opción d***.

9. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no se hizo de la derivación de la ecuación de Bernoulli? (Bauer & Westfall, 2011)
    a) Las líneas de corriente no se cruzan.
    b) Hay viscosidad despreciable.
    c) Hay fricción despreciable.
    d) No hay turbulencia.
    e) Hay gravedad despreciable.

Solución: La ecuación de Bernoulli tiene sustento básicamente en el principio de conservación de la energía, por lo tanto, se tiene en cuenta el cambio de energía potencial al ir un fluido de un punto a otro a lo largo de la “tubería”, si se hubiese hecho la suposición que la gravedad es despreciable el termino $\rho g h$ no aparecería en esta ecuación por lo tanto ***la respuesta correcta es la opción e***.

10. Un vaso de precipitado se llena con agua hasta el borde. Cuando se coloca suavemente un patito de plástico de juguete ocasiona que algo de agua se derrame. El peso del vaso de precipitado con el patito flotando en él es (Bauer & Westfall, 2011)

a) mayor que el peso antes de poner al patito.
b) menor que el peso antes de poner al patito.
c) igual que el peso antes de poner al patito.
d) mayor o menor que el peso antes de poner al patito, dependiendo del peso del patito.

Solución: cuando se derrama algo de agua al colocar el patito, esta agua corresponde a la fuerza de empuje que ejerce el fluido sobre el patito, por lo tanto, el peso del recipiente con el patito sigue siendo igual al de antes de colocar el objeto. Por lo tanto, ***la respuesta correcta es la opción c***.

11. Un pedazo de corcho (densidad = 0.33 g/cm^3) con una masa de 10 g se mantiene en su sitio bajo el agua mediante una cuerda, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la tensión, T en la cuerda? (Bauer & Westfall, 2011)

a) 0.10 N

b) 0.20 N

c) 0.30 N

d) 100 N

e) 200 N

f) 300 N

Figura 9.

Solución: Para determinar que tensión soporta la cuerda debemos primero realizar un diagrama de cuerpo libre sobre el objeto. Las fuerzas que están actuando sobre estos son: el peso hacia abajo, la tensión que también va hacia abajo y la fuerza de empuje o de flotación hacia arriba.

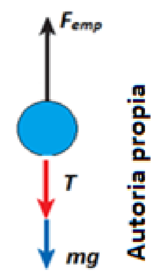


Figura 10.

Aplicando la segunda ley de Newton tenemos:

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{emp} - T - mg = 0$$

$$T = F_{emp} - mg$$

Por definición se tiene que la fuerza de empuje es igual al peso del fluido desalojado por el cuerpo

$$F_{emp} = m_{fluido} * g$$

$$F_{emp} = \rho_{fluido} V_{cuerpo} * g$$

Donde hemos utilizado la definición $\rho = {}^{m}/_{V}$

Ahora bien con $V = {}^{m}/_{\rho}$, entonces

$$F_{emp} = \rho_{fluido} \frac{m_{cuerpo}}{\rho_{cuerpo}} * g$$

Reemplazando la fuerza de empuje en la expresión para la tensión se tiene

$$T = \rho_{fluido} \frac{m_{cuerpo}}{\rho_{cuerpo}} * g - mg$$

$$T = \left(\frac{\rho_{fluido}}{\rho_{cuerpo}} - 1\right) mg$$

Reemplazando los valores dados

$$T = \left(\frac{10^3}{330} - 1\right) * 0.01 * 9.8$$

$$\boldsymbol{T = 0.199N \approx 0.2N}$$

De acuerdo con el valor obtenido se tiene que ***la respuesta correcta es la opción b***.

12. La densidad media del cuerpo humano es de 985 kg/m^3 y la densidad típica del agua de mar es como de 1 020 kg/m^3.a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre de un cuerpo humano flotando en agua de mar y determine qué porcentaje del volumen del cuerpo está sumergido. b) La densidad media del

cuerpo humano, después de la inhalación máxima de aire, cambia a 945 kg/m^3. Dado que una persona flotando en el agua de mar inhala y exhala con lentitud, ¿qué porcentaje de su volumen sube y baja dentro del agua? c) El Mar Muerto (un lago de agua salada ubicado entre Israel y Jordania) es el mayor cuerpo de agua alada en el mundo. Su contenido de sal es más de seis veces el del agua de mar típica, lo cual explica por qué no hay vida de plantas o animales en él. Se observa que dos tercios del volumen del cuerpo de una persona que flota en el Mar Muerto se encuentra sumergido. Determine la densidad (en kg/m^3) del agua salada en el Mar Muerto. (Bauer & Westfall, 2011)

Solución: cuando cualquier cuerpo se encuentra flotando en un fluido las únicas fuerzas que existen sobre el son su peso y la fuerza de empuje que ejerce el fluido.

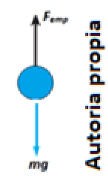


Figura 11.

Aplicando la segunda ley de Newton tenemos:

$$\sum F_y = 0$$

$$F_{emp} - mg = 0$$

$$F_{emp} = m_{fluido} * g$$

$$F_{emp} = \ \rho_{fluido} V_{sumergido} * g$$

$$\rho_{fluido} V_{sumergido} * g - m_{cuerpo} g = 0$$

Eliminando la gravedad y utilizando $V = {}^{m}/_{\rho}$ se tiene

$$\rho_{fluido}V_{sumergido} = \rho_{cuerpo}V_{cuerpo}$$

$$\frac{V_{sumergido}}{V_{cuerpo}} = \frac{\rho_{cuerpo}}{\rho_{fluido}}$$

La anterior ecuación nos dice que la fracción de volumen sumergido está en razón de las densidades del cuerpo y el fluido

Por lo tanto, la fracción del cuerpo humano sumergido es:

$$\frac{V_{sumergido}}{V_{cuerpo}} = \frac{985}{1020}$$

$$\boldsymbol{\frac{V_{sumergido}}{V_{cuerpo}} = 0.966}$$

Este resultado básicamente lo que indica es que aproximadamente el 97% del cuerpo se encuentra sumergido.

Dado que después de una inhalación la densidad del cuerpo humano cambia, también cambiara el volumen sumergido. Hallemos el porcentaje sumergido después de una inhalación.

$$\frac{V_{sumergido}}{V_{cuerpo}} = \frac{945}{1020}$$

$$\boldsymbol{\frac{V_{sumergido}}{V_{cuerpo}} = 0.926}$$

Ahora se tiene que el volumen sumergido es aproximadamente el 93%. Disminuye, puesto que la densidad disminuye. La cantidad de volumen que está entrando y saliendo del agua mientras se exhala e inhala es la resta de los dos valores obtenidos anteriormente

$$\frac{\Delta V}{V_{cuerpo}} = 0.966 - 0.926$$

$$\boldsymbol{\frac{\Delta V}{V_{cuerpo}} = 0.04}$$

Lo que indica este resultado es que básicamente el 4% del cuerpo humano asciende y desciende mientras se inhala y se exhala.

Ahora bien, en el mar muerto se tiene que

$$\frac{V_{sumergido}}{V_{cuerpo}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{V_{sumergido}}{V_{cuerpo}} = \frac{\rho_{cuerpo}}{\rho_{fluido}}$$

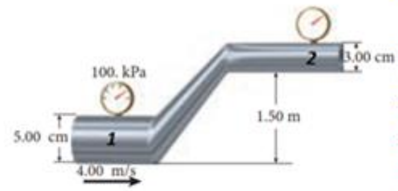
$$\frac{2}{3} = \frac{\rho_{cuerpo}}{\rho_{fluido}}$$

$$\rho_{fluido} = \frac{3}{2}\rho_{cuerpo}$$

$$\rho_{fluido} = \frac{3}{2} * 985\ \frac{kg}{m^3}$$

$$\boldsymbol{\rho_{fluido} = 1477.5\,\frac{kg}{m^3}}$$

13. El agua está fluyendo en una tubería como se describe en la figura. ¿Qué presión se indica en el manómetro superior? (Bauer & Westfall, 2011)



tomado de Bauer. W. - Westfall. G. D. 2 ed.

Figura 12.

Solución: Este es uno de los problemas típicos del uso de la ecuación de Bernoulli, dado que tenemos un fluido en movimiento. A la parte inferior la llamaremos sección 1 y a la superior la sección 2. Escribiendo la ecuación de Bernoulli se tiene

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Al tomar el punto de referencia en la parte inferior se tiene que $h_1 = 0$. De otro lado para poder utilizar la anterior ecuación se debe conocer la velocidad en 2. Esta velocidad la calcularemos haciendo uso de la ecuación de continuidad.

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Si suponemos una sección transversal circular entonces

$$A = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi \emptyset^2$$

De donde $\emptyset$, es el diámetro

$$\frac{1}{4}\pi \emptyset_1^2 v_1 = \frac{1}{4}\pi \emptyset_2^2 v_2$$

Simplificando y despejando para v_2, tenemos

$$v_2 = \frac{\text{Ø}_1^2}{\text{Ø}_2^2}\, v_1$$

Reemplazando en la ecuación de Bernoulli

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\text{Ø}_1^2}{\text{Ø}_2^2}\, v_1\right)^2$$

Ahora despejando P_2

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\text{Ø}_1^2}{\text{Ø}_2^2}\, v_1\right)^2 - \rho g h_2 = P_2$$

Reorganizando la ecuación tenemos

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(1 - \frac{\text{Ø}_1^4}{\text{Ø}_2^4}\right) - \rho g h_2 = P_2$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2\left(1 - \left[\frac{\text{Ø}_1}{\text{Ø}_2}\right]^4\right) - \rho g h_2$$

Reemplazando los valores dados

$$P_2 = 100 * 10^3 + \frac{1}{2} * 1000 * 4^2\left(1 - \left[\frac{5}{3}\right]^4\right) - 1000 * 9.8 * 1.5$$

$$\boldsymbol{P_2 = 31571.60\ Pa = 31.57\ kPa}$$

14. Un aeroplano se mueve a través del aire a una velocidad v = 200. m/s. Las líneas de flujo justo sobre la cara superior del ala se comprimen 80.0%

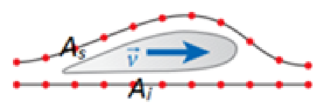
de su área original y aquellas bajo el ala no se comprimen para nada. (Bauer & Westfall, 2011)

a) Determine la velocidad del aire justo sobre el ala.

b) Encuentre la diferencia de presión entre el aire justo sobre el ala, P, y bajo el ala, P´.

c) Encuentre la fuerza ascendente neta sobre ambas alas debida a la diferencia de presión, si el área del ala es de 40.0 m^2 y la densidad del aire es de 1.30 kg/m^3.

Solución: en la figura 13, se ilustra lo que está sucediendo en el ala de la aeronave, para determinar la velocidad del aire sobre la parte superior de la aeronave podemos utilizar la ecuación de continuidad, esto es



tomado de Bauer. W. - Westfall. G. D. 2 ed.

Figura 13.

$$A_s v_s = A_i v_i$$

con

$$A_s = 0.8 A_i$$

Reemplazando se tiene

$$0.8 A_i v_s = A_i v_i$$

$$v_s = \frac{v_i}{0.8}$$

$$v_s = \frac{200}{0.8}$$

$$\boldsymbol{v_s = 250\ {}^{m}/_{s}}$$

Ahora para determinar la diferencia de presión existe entre la parte inferior del ala y la parte superior debemos utilizar la ecuación de Bernoulli

$$P_i + \rho g h_i + \frac{1}{2}\rho v_i^2 = P_s + \rho g h_s + \frac{1}{2}\rho v_s^2$$

En esta ecuacion podemos suponer que no hay diferencia de altura apreciable entre la parte inferior y superior del ala esto es $\Delta h \approx 0$

$$P_i - P_s = \frac{1}{2}\rho v_s^2 - \frac{1}{2}\rho v_i^2$$

$$P_i - P_s = \Delta P = \frac{1}{2}\rho(v_s^2 - v_i^2)$$

$$\Delta P = \frac{1}{2} * 1.3 * (250^2 - 200^2)$$

$$\boldsymbol{\Delta P = 14625\ Pa}$$

Esta diferencia de presión es positiva, lo que indica que existe una fuerza neta hacia arriba. Esta fuerza es la que hace ascender la aeronave (fuerza ascensional), cuyo valor se puede obtener al multiplicar esta presión por el área del ala.

$$P = \frac{F}{A}$$

$$F = \Delta P * A$$

$$F = 14625 * 40$$

$$\boldsymbol{F = 585000\ N = 585\ kN}$$

OSCILACIONES

Los sistemas oscilantes en física son de gran importancia, es por eso que existe toda una rama de la física dedicada a estudiarlos. Existen dos tipos de sistemas oscilantes: los electromagnéticos y los mecánicos. Aquí se hará un breve repaso de las oscilaciones mecánicas. Este tipo de oscilaciones son de vital importancia en la ingeniería, pues entenderlas no evitara complicaciones y "dolores" de cabeza. Un ejemplo donde son de vital importancia las oscilaciones mecánicas es en aeronaves, dado que toda su estructura vibra bien sea cuando está en tierra con sus motores encendidos o cuando realiza un vuelo; al estar vibrando su estructura, el material del que está hecha y las uniones entre sus piezas están sometidas a esfuerzos, esfuerzos que pueden llegar a romper una pieza, y, ya sabemos las consecuencias que esto traería.

Diremos que si un cuerpo oscila tiene un movimiento periódico, pero debemos de tener cuidado al momento de hablar de movimientos periódicos pues no todo movimiento periódico es oscilatorio. Un ejemplo de esto es por ejemplo el movimiento de la tierra alrededor del sol, su movimiento es periódico porque completa un ciclo en un determinado tiempo, pero esta no oscila.

Dicho lo anterior cabe preguntarse ¿cuándo un sistema oscila? La respuesta se puede dar de diferentes maneras, pero aquí empezaremos con un ejemplo sencillo para responder a ella. Consideremos un objeto que se encuentra sobre una mesa atado a un resorte horizontal. Sobre ello se harán dos consideraciones a fin de entender mejor el fenómeno. La primera consideración y que se mantendrá a lo largo de esta cartilla solucionario, es que el resorte es ideal, esto es, la masa del resorte es muy pequeña comparada con la masa que está atada a él, lo cual equivale a decir que el resorte es un almacenador puro de energía potencial.

La segunda consideración es que no existe fricción entre el objeto y la mesa, esta consideración será objeto de revisión más adelante. Este tipo de oscilaciones donde no se tiene en cuenta la fricción se llaman oscilaciones libres.

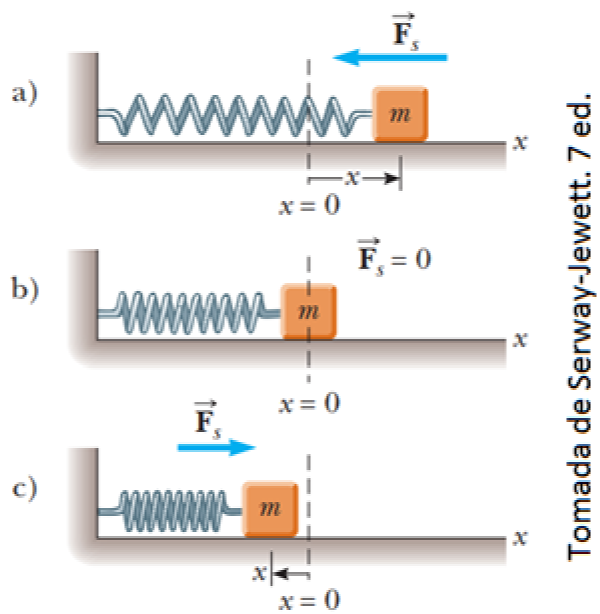


Figura 14. Masa oscilante sobre una mesa sin friccion

La figura 14, ilustra la situación propuesta. Si el cuerpo se encuentra desplazado hacia la derecha de la posición de equilibrio experimentará una fuerza debida al resorte hacia la izquierda (a). Cuando la masa está en su posición de equilibrio, (el resorte no se encuentra deformad x = 0), esta no experimenta fuerza alguna debido al resorte. Ahora bien, si el cuerpo se encuentra desplazada hacia la izquierda de su posición de equilibrio (c), el resorte le hace a esta una fuerza hacia la derecha. De lo anterior se puede concluir que la fuerza que le hace el resorte a la masa es una fuerza de tipo recuperadora. Fuerza que siempre trata de devolver el cuerpo hacia su posición de equilibrio. Aplicando la segunda ley de Newton al sistema se tiene:

$$\sum F_x = ma_x$$

La única fuerza que actúa en dirección horizontal sobre la masa es la del resorte, por lo tanto, tenemos

$$F_{resorte} = ma_x$$

$$-kx = ma_x$$

El signo menos se debe a que la fuerza que hace el resorte siempre es opuesta a su deformación como ya se dijo. Recordando que la aceleración es la segunda deriva de la posición se tiene

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Reorganizando términos se tiene

$$\boldsymbol{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

La anterior ecuación es una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, al utilizar las técnicas de solución de las ecuaciones diferenciales se obtiene

$$\boldsymbol{x(t) = \begin{cases} A\,\mathrm{sen}(wt + \emptyset) \\ A\cos(wt + \emptyset) \end{cases}}$$

La solución es una función oscilante periódica como la función seno o coseno. De ahí entonces que se diga que una masa atada a un resorte oscile. También del análisis anterior se puede decir que cuando sobre un cuerpo actúa una fuerza de tipo recuperadora (directamente proporcional a menos el desplazamiento del objeto), el cuerpo oscilara. Este tipo de movimiento también suele conocerse como *Movimiento Armónico Simple*.

En la función posición obtenida se pueden distinguir tres contantes, una de ellas es la amplitud, *A*, que es el máximo desplazamiento que sufre la masa de su posición de equilibrio, y *w*, que es la frecuencia angular del movimiento, y está dada por

$$\boldsymbol{w = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

También se puede expresar como

$$w = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

De donde *f*, es la frecuencia del movimiento y *T*, su periodo. Con lo cual se tiene

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

La otra constante que aparece es la fase inicial Φ, la cual tiene que ver con las condiciones iniciales del problema.

La velocidad de la masa en cualquier instante seria

$$\boldsymbol{v(t) = \frac{dx}{dt} = Awcos(wt + \emptyset)}$$

Y su aceleración

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = Aw^2sen(wt + \emptyset)$$

$$\boldsymbol{a(t) = w^2x(t)}$$

Combinado las ecuaciones de posición y velocidad en cualquier instante se tiene

$$x^2 + \frac{v^2}{w^2} = A^2$$

La anterior ecuación relaciona la posición con la velocidad que tiene el objeto en dicha posición.

Dado que no existe fricción en el sistema, la energía mecánica de este permanece constante siempre. Esto es

$$E = U + K = Cte$$

De donde *U*, es la energía potencial y *K*, la energía cinética.

$$U + K = \frac{1}{2}kA^2$$

La figura 15. ilustra lo anterior

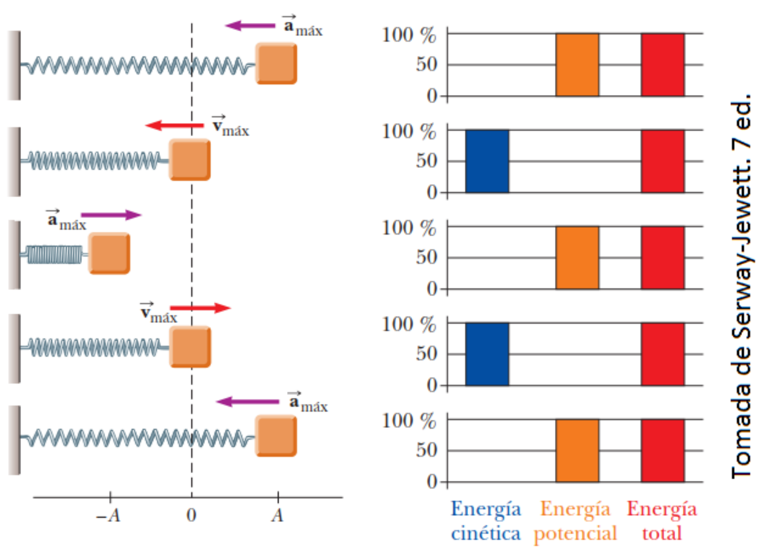


Figura 15. Energía en el M.A.S, en diferentes instantes

Otro sistema que realiza un movimiento oscilatorio periódico es el conocido es conocido como *péndulo simple*, figura 16. El péndulo simple consiste de una masa sujeta a una cuerda, hay que aclarar que las dimensiones de la masa deben ser muy pequeñas comparadas con la longitud de la cuerda. En este sistema la fuerza recuperadora responsable de que la masa oscile es la componente tangencial del peso, *m*g*senθ*.

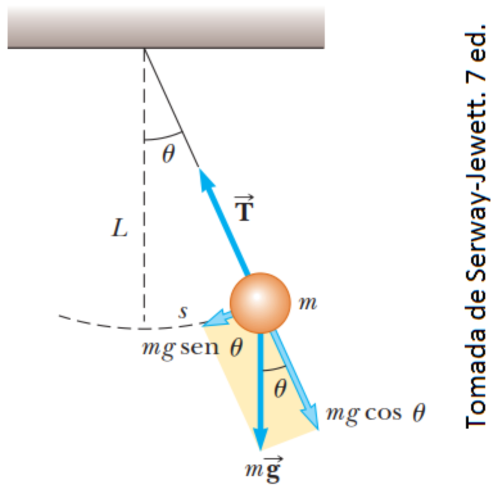


Figura 16. El péndulo simple

Para que el péndulo simple oscile con movimiento armónico simple (M.A.S), se necesita que el ángulo máximo de desplazamiento sea menos o igual a 15^0.

Para el péndulo simple la frecuencia angular está dada por

$$w = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Por lo tanto, el periodo de oscilación de la masa será

$$\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Esta ecuación nos dice que el periodo de oscilación no depende del valor de la masa, es decir, que todas las masas sujetas a una cuerda de la misma longitud tendrán igual periodo.

Ahora nos preguntaremos que ¿sucede con las oscilaciones libres cuando existe una fuerza de fricción? Nuestra intuición y conocimiento de la mecánica Newtoniana nos dice que el objeto oscilará, pero a medida que transcurre el tiempo debido a la fricción hay perdida de energía y por lo tanto la amplitud de las oscilaciones disminuirá hasta detenerse. Un ejemplo de esto sería un objeto sumergido en un fluido y que este sujeto a un resorte vertical. Figura 16.

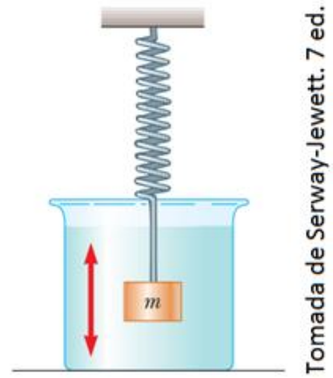


Figura 16. Oscilaciones amortiguadas

Hay que aclarar que no es necesario que el objeto este sumergido en el fluido para que la amplitud de sus oscilaciones disminuya, pues la fricción con el aire tendría los mismos efectos, obviamente para que la amplitud se redujese apreciablemente tomaría más tiempo. Este movimiento donde la amplitud de las oscilaciones disminuye se conoce como *movimiento oscilatorio amortiguado u oscilaciones amortiguadas.*

La fricción es una fuerza resistiva que se opone al movimiento, por lo tanto, si se escribe la ecuación de movimiento para este sistema se tiene

$$\sum F = ma$$

$$F_{resorte} + F_{friccion} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Vamos a suponer una fuerza de fricción o resistiva proporcional a la velocidad esto es $F_{friccion} = -bv$, con lo que la ecuación toma la forma

$$-ky - bv = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$-ky - b\frac{dy}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Reacomodando la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = 0$$

La solución a esta ecuación diferencial es

$$\boldsymbol{y(t) = A_0 e^{-\gamma t} * \begin{cases} sen(wt + \varphi) \\ o \\ \cos(wt + \varphi) \end{cases}}$$

De donde

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{b}{2m}}$$

$$\boldsymbol{w = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2}}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

donde w_o, es la frecuencia de las oscilaciones libres.

La razón para haber elegido el tipo de solución propuesta es que la fricción sea pequeña comparada con la fuerza restauradora.

Se debe notar que ahora el oscilador amortiguado oscila con una frecuencia diferente a la de las oscilaciones libres. Además de la existencia del factor $\boldsymbol{e^{-\gamma t}}$, en la amplitud. Este factor es el responsable de que las oscilaciones se amortigüen, es decir, se reduzcan con el tiempo.

Dado la presencia de la fuerza resistiva tal como se dijo antes la energía del movimiento no permanece constante, si no que existe una perdida permanente de energía. La expresión para la energía es ahora

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{2}kA_0^2e^{-2\gamma t}}$$

$$\boldsymbol{E = E_0e^{-2\gamma t}}$$

Dado que como se dijo antes en las oscilaciones amortiguadas existen perdidas de energía debido a la fricción, si queremos mantener la amplitud de las oscilaciones se hace necesario compensar la pérdida de energía, esto se logra con la ayuda de una fuerza externa que compense las perdidas. Esta fuerza externa no es cualquier fuerza, debe ser una fuerza "pulsante" que actué solo en un punto de la trayectoria del objeto. Esta es una fuerza periódica que *forzara* al sistema a mantener como mínimo constante la amplitud de las oscilaciones. La fuerza de la que se habla es del tipo

$$F_{externa} = F_0 cosw_f$$

Al movimiento oscilatorio el cual es sometido a una fuerza externa periódica se le conoce como *oscilaciones forzadas.*

Ahora la segunda ley de Newton para un sistema forzado es

$$\sum F = ma$$

$$F_{resorte} + F_{friccion} - F_{externa} = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

Reemplazando se tiene

$$-kx - b\frac{dx}{dt} + F_0 cosw_f = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Reorganizando los términos se tiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}cosw_f$$

La anterior ecuación ya no es una ecuación diferencial homogénea, es una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden. Y la solución a esta ecuación es

$$x(t) = A_0 sen\left(w_f t + \varphi_0\right)$$

De donde A_0, es la amplitud de las oscilaciones forzadas y está dada por

$$\boldsymbol{A_0} = \frac{\boldsymbol{F_0}/\boldsymbol{m}}{\sqrt{\left(\boldsymbol{w_f^2} - \boldsymbol{w_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\boldsymbol{b w_f}}{\boldsymbol{m}}\right)^2}}$$

Ahora la fase inicial está dada por

$$\boldsymbol{\varphi_0} = \boldsymbol{tan^{-1}}\left(\frac{\boldsymbol{w_0^2} - \boldsymbol{w_f^2}}{\boldsymbol{w_f}\left(\boldsymbol{b}/\boldsymbol{m}\right)}\right)$$

Entender las oscialciones forzadas es de vital importancia pues con ellas se pueden explicar muchos fenomenos tales como: La ruptura de un puente cuando, el desplome de una edificacion cuando hay un sismo. Tambien desde el punto de vista medico son importantes, pues debido a ellas existen los ecografias y tambien se pueden destruir los calculos renales y muchas mas aplicaciones medicas.

El fenómeno por cual se pueden entender los ejemplos anteriores es *la resonancia*. Dicho fenómeno ocurre cuando la frecuencia de la fuerza externa es igual o aproximadamente igual a la frecuencia de la fuerza externa, cuando esto ocurre la amplitud de las oscilaciones aumenta de una manera sorprendente y se dice que en este momento el sistema absorbe el máximo de energía.

Los problemas que a continuación se solucionan son tomados del libro:

PROBLEMAS RESUELTOS DE OSCILACIONES

1. Dos niños están en columpios adyacentes de la misma altura en el campo de juegos. Un adulto los empuja y los deja columpiando. Suponiendo que cada niño en un columpio puede tratarse como un péndulo simple y que la fricción es despreciable, ¿cuál niño tarda más tiempo en completar una oscilación (es decir, cuál niño tiene un periodo mayor)? (Bauer & Westfall, 2011)
   a) el niño más pesado.
   b) el niño más ligero.
   c) ninguno de los dos.
   d) el niño al que se le da el mayor empujón.

Solución: El periodo de oscilación para un péndulo simple está dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

De donde se puede ver que el periodo no depende de la masa del objeto suspendido, solo depende de la longitud del péndulo y del valor de la aceleración de la gravedad, por lo tanto, los dos niños tendrán el mismo periodo de oscilación. ***La respuesta correcta es la opción c***.

2. Dos bloques idénticos oscilan en el extremo de un resorte vertical, uno en la Tierra y otro en la Luna. ¿Dónde es mayor el periodo de oscilaciones? (Bauer & Westfall, 2011)

a) en la Tierra.

b) en la Luna.

c) igual en la Tierra que en la Luna.

d) no se puede determinar a partir de la información dada.

Solución: El periodo de oscilación para una masa sujeta a un resorte ideal (sistema masa-resorte) está dado por la ecuación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

De acuerdo con la ecuación dada el periodo de oscilación de la masa sujeta al resorte solo depende de la constante elástica del resorte y del valor de la masa sujeta a este. Dado entonces que tanto los bloques como los resortes son idénticos, el periodo de oscilación será el mismo. Por lo tanto, ***La respuesta correcta es la opción c***

3. Una masa que puede oscilar sin fricción sobre una superficie horizontal está sujeta a un resorte horizontal que se jala a la derecha 10.0 cm y se libera a partir del reposo. El periodo de oscilación de la masa es de 5.60 s. ¿Cuál es la rapidez de la masa a t = 2.50s? (Bauer & Westfall, 2011)

   a) $-2.61 \cdot 10^{-1}$m/s

   b) $-1.06 \cdot 10^{-1}$m/s

   c) $-3.71 \cdot 10^{-2}$m/s

   d) $-2.01 \cdot 10^{-1}$m/s

Solución: La función posición para un sistema masa-resorte es:

$$x(t) = A\sin(w_0 t + \theta_0)$$

De donde A, es la amplitud, ω_0 es la frecuencia angular natural del sistema $\left(w_0^2 = {}^{k}/_{M}\right)$ y θ_0 es la fase inicial. Al derivar esta ecuación se obtiene la velocidad de la masa en cualquier instante. Es decir,

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$v(t) = Aw_0\cos(w_0 t + \theta_0)$$

Para saber cuál que velocidad tiene la masa a t = 2.50 s, se debe construir la ecuación de la velocidad.

Sabemos que:

$$w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Entonces

$$w_0 = \frac{2\pi}{5.60} = 1.12\ s^{-1}$$

La amplitud el movimiento será 0,1m (10 cm) dado que es el punto de donde se suelta sin imprimirle velocidad inicial alguna. La fase inicial θ_0, se puede obtener reemplazando las condiciones iniciales en la ecuación de posición:

$$x(0) = 0.1\ m = 0.1\sin(w_0 * 0 + \theta_0)$$

$$\frac{0.1}{0.1} = \sin(\theta_0)$$

$$1 = \sin(\theta_0)$$

Despejando para θ_0, se tiene:

$$\theta_0 = \sin^{-1} 1$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, la ecuación para la velocidad queda:

$$v(t) = 0.1 * 1.12 * \cos\left(1.12t + {}^{\pi}/_{2}\right)$$

Haciendo uso de la identidad trigonométrica:

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

Tiene

$$v(t) = 0.112\left[\cos(1.12t)\cos\left({}^{\pi}/_{2}\right) - \sin(1.12t)\sin\left({}^{\pi}/_{2}\right)\right]$$

Con, $\cos\left({}^{\pi}/_{2}\right) = 0$ y $\sin\left({}^{\pi}/_{2}\right) = 1$, la expresión para la velocidad en cualquier instante queda

$$v(t) = -0.112\sin(1.12t)$$

Evaluando ahora para t = 2.5s

$$v(t = 2.5) = -0.112\sin(1.12 * 2.5)$$

$$v(t = 2.5) = -0.0375\,\frac{m}{s} = -3.8 * 10^{-2} m/s$$

De lo anterior se tiene que La ***respuesta correcta es la opción c***.

4. La constante de resorte para un sistema masa-resorte que experimenta un movimiento armónico simple se duplica. Si la energía total permanece sin cambios, ¿qué pasará con la amplitud máxima de la oscilación? Suponga que el sistema es subamortiguado. (Bauer & Westfall, 2011)

a) Permanecerá sin cambios.
b) Se multiplicará por 2.
c) Se multiplicará por 1/2.
d) Se multiplicará por $^{1}/_{\sqrt{2}}$.

Solución: La expresión para obtener la energía de las oscilaciones libres de un sistema masa resorte es:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

De donde k, es la constante elástica del resorte y por supuesto A es la amplitud. Para que la energía permanezca constante es necesario que cuando cambie la constante elástica también debe cambiar la amplitud. Si la una aumenta la otra debe disminuir, dado que la energía es directamente proporcional tanto a la amplitud como a la constante elástica. Por lo tanto, para nuestro caso puesto que la constante elástica aumenta, entonces la amplitud debe disminuir

$$E_{antes} = E_{despues}$$

$$\frac{1}{2}kA_{antes}^2 = \frac{1}{2}(2k)A_{despues}^2$$

Simplificando

$$A_{despues} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{antes}$$

Por lo anterior se desprende que la ***respuesta correcta es la opción d***.

5. Con la selección adecuada de parámetros, un péndulo físico amortiguado e impulsado puede mostrar un movimiento caótico, el cual depende sensiblemente de las condiciones iniciales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones acerca de semejante péndulo es verdadera? (Bauer & Westfall, 2011)

a) Su comportamiento a largo plazo puede predecirse.
b) Su comportamiento a largo plazo no es predecible.
c) Su comportamiento a largo plazo es como el de un péndulo simple de una longitud equivalente.
d) Su comportamiento a largo plazo es como el de un péndulo cónico.
e) Ninguna de las anteriores es verdadera.

Solución: Dado que el péndulo presenta un movimiento caótico es muy complicado predecir cuál será su comportamiento a futuro, por lo tanto, ***la respuesta correcta es la opción b***.

6. Un resorte cuelga del techo con una masa sujeta a él. La masa se jala hacia abajo, causando que oscile en forma vertical con un movimiento armónico simple. ¿Cuál de las siguientes incrementará la frecuencia de oscilación? (Bauer & Westfall, 2011)

a) Agregar un segundo resorte idéntico con un extremo sujeto a la masa y el otro al techo.

b) Agregar un segundo resorte idéntico con un extremo sujeto a la masa y el otro al suelo.

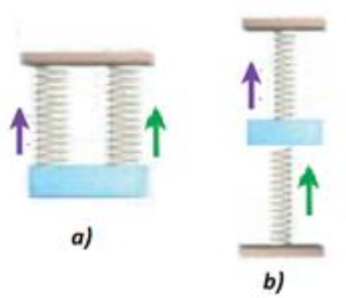
c) Aumentar la masa.

d) Agregar ambos resortes, como se describe en a) y b).

Solución: La frecuencia es el inverso del periodo, para un objeto que oscila sujeto a un resorte está dada por:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}$$

Tal como se puede ver la frecuencia es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa sujeta al resorte y directamente proporcional a la raíz cuadrada de la constante del resorte. Por lo tanto, para aumentar la frecuencia de oscilación se debe cambiar el resorte por otro que tenga una constante elástica mayor o disminuir la masa del objeto sujeta al resorte. Otra forma alternativa seria cambiar la disposición experimental.



tomado de Bauer. W. - Westfall. G. D. 2 ed.

Figura 17.

En la figura 17, se ilustran las situaciones experimentales propuestas en las opciones a) y b). En cualquiera de las dos alternativas siempre los dos resortes van a empujar el bloque en la misma dirección. En la figura se muestra cuando los resortes empujan al cuerpo hacia arriba, pues este se encuentra desplazado debajo de su posición de equilibrio. Por lo tanto, la segunda ley de Newton para los dos casos queda

$$-kx - kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Se coloca la misma constante elástica porque los resortes son idénticos y por la disposición de los resortes estos se estiran o se comprimen la misma distancia.

$$-2kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2k}{m}x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2x$$

$$w = 2\pi f = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

La anterior ecuación muestra que las dos disposiciones experimentales lo que hacen es aumentar la constante efectiva del sistema oscilante, por lo tanto, cualquiera de estas disposiciones hará aumentar la frecuencia de oscilación. Lo que significa que ***la respuesta correcta es la opción d***.

7. Un niño de masa M está balanceándose en un columpio de longitud L a un ángulo de deflexión máximo de θ. Un hombre con una masa 4M está balanceándose en un columpio semejante de longitud L a un ángulo máximo de 2θ. Cada columpio puede tratarse como un péndulo simple experimentando un movimiento armónico simple. Si el periodo para el movimiento del niño es T, entonces el periodo del movimiento del hombre es (Bauer & Westfall, 2011)

   a) T. b) 2T. c) T/2. d) T/4

Solución: El periodo de oscilación para un péndulo simple está dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Como se puede observar el periodo no depende de la masa suspendida ni del ángulo de deflexión, lo que quiere decir que tanto el niño como el adulto tendrán el mismo periodo de oscilación. Por lo tanto, ***la respuesta correcta es la opción a***.

8. El objeto A es cuatro veces más pesado que el objeto B. Cada objeto se sujeta a un resorte y los resortes tienen la misma constante de resorte. Entonces, dos objetos se jalan a partir de sus posiciones de equilibrio y se liberan a partir del reposo. ¿Cuál es el cociente de los periodos de las dos oscilaciones si la amplitud de A es la mitad de la de B? (Bauer & Westfall, 2011)

a) $T_A : T_B = 1:4$

b) $T_A : T_B = 4:1$

c) $T_A : T_B = 2:1$

d) $T_A : T_B = 1:2$

Solución: como se sabe el periodo para una masa sujeta a un resorte está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

Escribiendo la expresión del periodo para cada oscilador

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{M_A}{k}}$$

$$T_B = 2\pi\sqrt{\frac{M_B}{k}}$$

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{2\pi\sqrt{\frac{M_A}{k}}}{2\pi\sqrt{\frac{M_B}{k}}}$$

Simplificando se tiene

$$\frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{M_A}{M_B}}$$

Con $M_A = 4M_B$,

$$\frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{4M_B}{M_B}}$$

$$\frac{T_A}{T_B} = 2$$

De lo cual se despende que la ***respuesta correcta es la opción c***.

9. Ordene jerárquicamente los osciladores armónicos simples de la figura 18 en orden de sus frecuencias intrínsecas, de la mayor a la menor. Todos los resortes tienen constantes de resorte idénticas y todos los bloques tienen masas idénticas. (Bauer & Westfall, 2011)

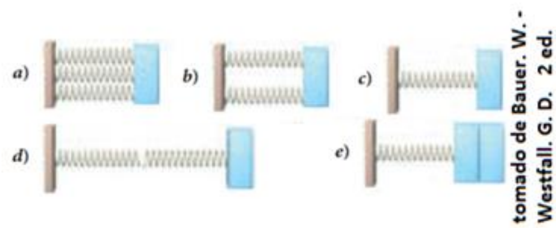


Figura 18

Solución:

La frecuencia para las opciones a) y b), están dadas por

$$\boldsymbol{w_a} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{3k}}{\boldsymbol{m}}}$$

$$\boldsymbol{w_b} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{2k}}{\boldsymbol{m}}}$$

Para ver como se llega a esto ver la solución del problema 6. Para las opciones c) y e) que son sistemas masa-resorte normales se tiene

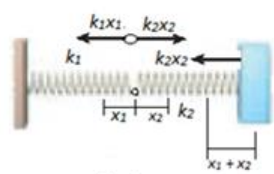
$$w_c = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$w_e = \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Para la opción d), la cuestión es un poco más complicada, para explicarlo mejor vamos a suponer que los resortes no son idénticos y sus constantes de fuerza serán k_1 y k_2. Esto lleva a que cuando la masa se separe una distancia x a partir de su posición de equilibrio los resortes se estiren distancias x_1 y x_2, respectivamente. La suma de estas dos distancias da el desplazamiento total de la masa, es decir,

$$x_1 + x_2 = x$$

La figura 19, ilustra las fuerzas que actúan sobre el punto de unión de los resortes y sobre el bloque mismo, cuando este se encuentra desplazado hacia la derecha una distancia x de su posición de equilibrio. Dado que el resorte dos es el que está conectado al bloque, es este quien ejerce fuerza sobre el bloque. Aplicando la segunda ley de Newton al punto de unión de los resortes, tomando a estos como almacenadores puros de energía potencial, es decir se toman como resortes ideales



tomado de Bauer. W. - Westfall. G. D. 2 ed.

Figura 19.

$$k_2x_2 - k_1x_1 = 0$$

De la ecuación de arriba se tiene

$$x_1 = -x_2 + x$$

Reemplazando en la anterior ecuación

$$k_2 x_2 - k_1(-x_2 + x) = 0$$

Despejando x_2

$$x_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} x$$

Lo anterior se hace debido que el desplazamiento de la masa es x y no x_2. Aplicando la segunda ley de Newton al bloque

$$-k_2 x_2 = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Reemplazando x_2

$$-\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Despejando la aceleración

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)} x = -w^2 x$$

Como sabemos el factor que acompaña a x es una contante y es la frecuencia angular de oscilación del sistema

$$w = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

Para el caso que nos ocupa $k_1 = k_2 = k$

$$\boldsymbol{w_d = \sqrt{\frac{k}{2m}}}$$

Si llamamos

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Entonces se tiene

$$\boldsymbol{w_a = \sqrt{3}w \qquad w_b = \sqrt{2}w \qquad w_c = w \qquad w_d = \frac{w}{\sqrt{2}} \qquad w_e = \frac{w}{\sqrt{2}}}$$

$$\boldsymbol{w_a > w_b > w_c > w_d = w_e}$$

10. Un péndulo se suspende del techo de un ascensor. Cuando el ascensor está en reposo, el periodo del péndulo es T. El ascensor acelera hacia arriba y el periodo es ahora (Bauer & Westfall, 2011)

a) Todavía T. b) Menor a T. c) Mayor a T.

Solución: El periodo de un péndulo está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

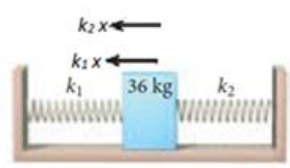
Se puede observar que el periodo depende del valor "local" de la aceleración de la gravedad. Si este valor de la "gravedad" aumenta el periodo disminuye, y si disminuye el periodo aumenta. Este valor de la aceleración de la gravedad se puede “modificar” si se coloca el dispositivo en un ascensor, por ejemplo. Si el ascensor acelera hacia arriba el valor local de la aceleración de la gravedad aumenta, por lo tanto, el periodo del péndulo disminuye, y si el ascensor acelera hacia abajo el valor de la aceleración de la gravedad disminuye entonces el periodo del péndulo aumenta. Lo anterior significa que **la respuesta correcta es la opción b**.

11. Una masa de 36 kg se coloca en una superficie sin fricción y entonces se conecta a las paredes por dos resortes con constantes de resorte k_1 = 3 N/m y k_2 = 4 N/m, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el periodo de oscilación de la masa de 36 kg si se desplaza ligeramente hacia un lado? (Bauer & Westfall, 2011)

tomado de Bauer. W. - Westfall. G. D. 2 ed.

a) 11 s b) 14 s c) 17 s d) 20 s e) 32 s f) 38 s

Solución: Cuando el bloque se desplaza una pequeña distancia y se libera, en cualquier momento los resortes están comprimidos/elongados la misma distancia, como la constante de fuerza de estos es diferente entonces la fuerza que ejerce cada uno de ellos sobre el bloque es diferente, en la figura se ilustran las fuerzas que ejercen los resortes cuando el bloque se ha desplazado una



tomado de Bauer. W. - Westfall. G. D. 2 ed.

Figura 20.

distancia x a la derecha de su posición de equilibrio. Aplicando la segunda ley de Newton al bloque se tiene

$$\sum F_x = Ma = M\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x - k_2x$$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{(k_1 + k_2)}{M}x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2x$$

$$w^2 = \frac{(k_1 + k_2)}{M}$$

$$w = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{M}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_1 + k_2}}$$

Reemplazando los valores en esta última ecuación

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{36}{3 + 4}}$$

$$T = 14.25\ s$$

Tal como se puede ver entonces ***la respuesta correcta es la opción b***.

PROBLEMAS RESUELTOS DE OSCILACIONES AMORTIGUADAS Y FORZADAS

1. Demuestre que la relación de cambio con el tiempo de la energía mecánica para un oscilador amortiguado no impulsado se conoce por $dE/_{dt} = -bv^2$ y por eso siempre es negativa. Para hacerlo, derive la expresión para la energía mecánica de un oscilador, $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$. (Bauer & Westfall, 2011)

Solución: La función posición para las oscilaciones amortiguadas está dada por

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t}\cos(wt + \emptyset)$$

De donde $w = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2}$ y $\gamma = b/_{2m}$.

Derivando la expresión para la energía respecto al tiempo

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}v^2 + \frac{1}{2}k\frac{d}{dt}x^2$$

$$\frac{dE}{dt} = mv\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt}$$

Dado que: $\frac{dx}{dt} = v$ y $\frac{dv}{dt} = a$ entonces podemos factorizar la velocidad

$$\boldsymbol{\frac{dE}{dt} = v(ma + kx)}$$

La expresión de la fuerza neta para el oscilador amortiguado está dada por

$$F_n = -kx - bv = ma$$

Reemplazando en la expresión para la derivada de la energía

$$\frac{dE}{dt} = v[-kx - bv + kx]$$

$$\frac{dE}{dt} = -bv^2$$

Que era lo que se quería demostrar.

2. Un péndulo con una longitud de 1.00 m se libera desde un ángulo inicial de 15.0°. Después de 1000 s, su amplitud se reduce por fricción a 5.50°. ¿Cuál es el valor de b/2m? (Bauer & Westfall, 2011)

Solución: La amplitud para el oscilador amortiguado es

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$$

Ahora se procederá a despejar el valor de γ

$$\frac{A}{A_0} = e^{-\gamma t}$$

Tomando el logaritmo natural a ambos lados tenemos

$$\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = \ln(e^{-\gamma t})$$

$$\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\gamma t \ln(e)$$

$$-\frac{1}{t}\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = \gamma$$

Reemplazando en la anterior ecuación

$$\frac{b}{2m} = \gamma = -\frac{1}{1000}\ln\left(\frac{5.5}{15}\right)$$

$$\boldsymbol{\gamma = 1.003 * 10^{-3} s^{-1}}$$

3. Un objeto de 10.6 kg oscila en el extremo de un resorte vertical que tiene una constante de resorte de $2.05x10^4$ N/m. El efecto de la resistencia del aire se representa mediante el coeficiente de amortiguamiento b = 3.00 N*s/m. a) Calcule la frecuencia de la oscilación amortiguada. b) ¿En qué porcentaje disminuye la amplitud de la oscilación en cada ciclo? c) Encuentre el intervalo de tiempo que transcurre mientras la energía del sistema cae a 5.00% de su valor inicial. (Bauer & Westfall, 2011)

Solución: La expresión que me permite calcular la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas es

$$w = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2}$$

$$w = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Reemplazando los valores dados

$$w = 2\pi f = \sqrt{\frac{2.05 * 10^4}{10.6} - \left(\frac{3}{2 * 10.6}\right)^2}$$

$$w = 2\pi f = 43.98\ s^{-1}$$

$$f = \frac{43.98}{2\pi} s^{-1}$$

$$\boldsymbol{f = 6.9996 s^{-1} \approx 7 s^{-1}}$$

(b) La amplitud está dada por

$$A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$$

Con

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{3}{2 * 10.6} = 0.14\ s^{-1}}$$

Y

$$\boldsymbol{t = T = \frac{1}{f} = \frac{1}{7 s^{-1}} = 0.14\ s}$$

Se tiene

$$A(T) = A_0 e^{-0.14 * 0.14}$$

$$\boldsymbol{A(T) = 0.98 A_0}$$

Se toma un tiempo igual a un periodo porque la duración de un ciclo es la de un periodo. De acuerdo con el resultado anterior se tiene que después de una oscilación la amplitud es un 98% de la amplitud inicial, lo que quiere decir que en cada ciclo la amplitud disminuye en un 2%.

(c) La expresión para la energía del oscilador amortiguado está dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E(t) = \frac{1}{2}k(A_0e^{-\gamma t})^2$$

$$E(t) = \frac{1}{2}kA_0^2e^{-2\gamma t}$$

$$\boldsymbol{E(t) = E_0e^{-2\gamma t}}$$

De donde

$$E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2$$

El que la energía decaiga a un 5.00% de su valor original significa que

$$E(t) = 0.05E_0$$

Reemplazando en la expresión para la energía se tiene

$$0.05E_0 = E_0e^{-2\gamma t}$$

Con

$$\gamma = 0.14\ s^{-1}$$

$$0.05 = e^{-2*0.14*t}$$

Tomando el logaritmo

$$\ln 0.05 = \ln e^{-2*0.14*t}$$

$$\ln 0.05 = -2*0.14*t*\ln e$$

$$-3 = -0.28t$$

$$t = \frac{3}{0.28}$$

$$\boldsymbol{t = 10.71\ s}$$

4. Un oscilador armónico amortiguado pierde 6.0% de su energía mecánica en cada ciclo. a) ¿En qué porcentaje difiere su frecuencia de la frecuencia natural b) ¿Después de cuántos periodos habrá disminuido la amplitud a 1/e de su valor original? (Bauer & Westfall, 2011)

Solución: Dado que la energía disminuye en cada ciclo en 6%, se tiene que después de un ciclo

$$E(t = T) = 0.94E_0$$

Reemplazaremos en la expresión para la energía del oscilador amortiguado

$$E(t) = E_0 e^{-2\gamma t}$$

$$0.94E_0 = E_0 e^{-2\gamma T}$$

$$\boldsymbol{0.94 = e^{-2\gamma T}}$$

Tomando el logaritmo

$$\ln 0.94 = \ln e^{-2\gamma T}$$

$$\ln 0.94 = -2\gamma T \ln e$$

$$\ln 0.94 = -2\gamma T$$

$$-0.062 = -2\gamma T$$

$$\mathbf{0.031} = \boldsymbol{\gamma T} \qquad (*)$$

Dado que no tenemos más información debemos buscar una ecuación que ligue a γ y T. Esta ecuación es

$$w = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2}$$

$$\gamma^2 = w_0^2 - w^2$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$$

De donde *T₀*, es el periodo de las oscilaciones no amortiguadas y *T*, el de las oscilaciones amortiguadas

Factorizando la anterior expresión

$$\gamma = \frac{2\pi}{T}\sqrt{\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 - 1}$$

$$\gamma T = 2\pi\sqrt{\frac{T^2}{T_0^2} - 1}$$

La relación entre el periodo y la frecuencia es

$$T = \frac{1}{f}$$

Reemplazando se tiene

$$\boldsymbol{\gamma T = 2\pi\sqrt{\frac{f_0^2}{f^2} - 1}} \qquad (**)$$

Igualando (*) y (**), entonces

$$0.031 = 2\pi\sqrt{\frac{f_0^2}{f^2} - 1}$$

$$\frac{0.031}{2\pi} = \sqrt{\frac{f_0^2}{f^2} - 1}$$

Elevando al cuadrado

$$\left(\frac{0.031}{2\pi}\right)^2 = \frac{f_0^2}{f^2} - 1$$

$$\left(\frac{0.031}{2\pi}\right)^2 + 1 = \frac{f_0^2}{f^2}$$

$$\frac{f_0}{f} = \sqrt{\left(\frac{0.031}{2\pi}\right)^2 + 1}$$

$$\frac{f}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{0.031}{2\pi}\right)^2 + 1}} = 0.999987829$$

$$\left(\frac{f}{f_0} - 1\right) * 100 = (0.999987829 - 1) * 100$$

$$\left(\frac{f}{f_0} - 1\right) * 100 = (-1.217 * 10^{-3})\%$$

(b) el que la amplitud disminuya en un factor de 1/e significa que

$$A(t) = \frac{A_0}{e}$$

Esto es

$$\frac{A_0}{e} = A_0 e^{-\gamma t}$$

$$\frac{1}{e} = e^{-\gamma t}$$

$$1 = e * e^{-\gamma t}$$

$$1 \ = e^{1-\gamma t}$$

Tomando el logaritmo

$$\ln 1 = \ \ln(e^{1-\gamma t})$$

$$0 = \ (1-\gamma t) \ln e$$

$$1 - \gamma t = 0$$

$$\boldsymbol{\gamma t} = \mathbf{1}$$

Dado que nos están preguntando para cuantos ciclos (n), recordando que cada ciclo dura un periodo (T), entonces tenemos que

$$t = nT$$

Reemplazando en la ecuación anterior, entonces se tiene

$$\gamma n T = 1$$

Reemplazando 0.031 = γT, entonces

$$0.031n = 1$$

$$n = \frac{1}{0.031}$$

$$\boldsymbol{n = 32.26 \approx 32\ ciclos}$$

5. a) Para las oscilaciones forzadas en la resonancia ($w = w_0$), ¿cuál es el valor del ángulo de fase ϕ_0? b) ¿Cuál es entonces el desplazamiento cuando la fuerza impulsora F_{ext} es máxima y cuando $F_{ext} = 0$? c) ¿Cuál es la diferencia de fase (en grados) entre la fuerza impulsora y el desplazamiento en este caso? (Bauer & Westfall, 2011)

Solución: La expresión para el ángulo de fase de las oscilaciones forzadas es

$$\phi_0 = tan^{-1}\left(\frac{w_0^2 - w^2}{w\left(b/_m\right)}\right)$$

Al reemplazar w por w_0 se tiene que $\boldsymbol{\phi_0 = 0}$

(b), (c) La expresión para la fuerza impulsora y la ecuación de la función posición son respectivamente

$$F_{ext} = F_0 Cos(wt)$$

$$x(t) = A_0 \sin(wt + \phi_0)$$

De (a) se tiene que si $w = w_0$, entonces el ángulo de fase ϕ_0 es cero, si reemplazamos estas condiciones en las expresiones para F_{ext} y $x(t)$ tenemos

$$\boldsymbol{F_{ext} = F_0 Cos(w_0 t)}$$

$$\boldsymbol{x(t) = A_0 \sin(w_0 t)}$$

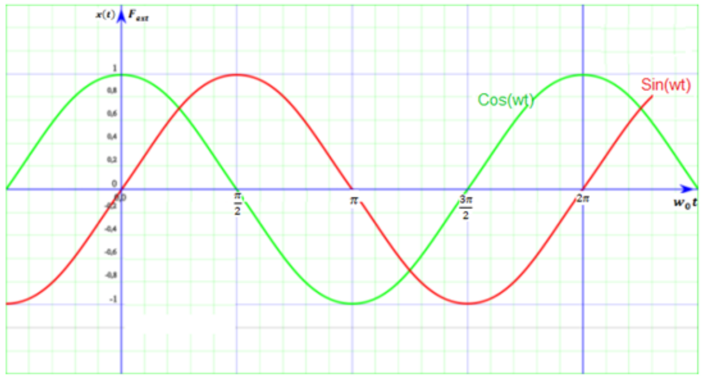


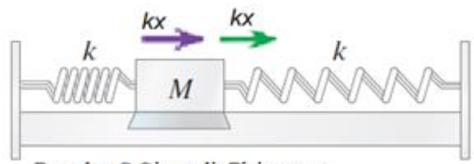
Figura 21. Gráficos del seno y el coseno. (Cesare, 2013)

Como se puede ver la fuerza impulsora es una función cosenoidal, mientras que la función posición es una senoidal, y todos sabemos que el seno y coseno están desfasados en $\pi/2$, es decir 90^0, tal como se ilustra en la figura adjunta. En esta figura se puede observar además que mientras el seno alcanza un máximo (la función posición) en $\pi/2$, la fuerza externa tiene un mínimo.

6. Un deslizador sobre una vía de aire está conectado con resortes a ambos extremos de la vía (figura 22). Ambos resortes tienen la misma constante de resorte, k, y el deslizador tiene masa M. a) Determine la frecuencia de la oscilación, suponiendo que no hay amortiguamiento, si k = 125 N/m y M = 215 g. b) Se observa que después de 55 oscilaciones, la amplitud de la oscilación ha disminuido a la mitad de su valor original. Estime el valor de γ, usando la ecuación 14-16. c) ¿Cuánto tiempo pasará para que la amplitud disminuya a un cuarto de su valor inicial? (GIANCOLI, C., 2009)

Figura 22.

Solución: Cuando el deslizador se desplaza una pequeña distancia y se libera, en cualquier momento los resortes están comprimidos y/o elongados la misma distancia, si las constantes de fuerza son diferentes entonces la fuerza que ejerce cada uno de ellos sobre el deslizador es diferente. En la figura se ilustran las fuerzas que ejercen los resortes cuando el deslizador se ha desplazado una distancia x a la izquierda de su posición de equilibrio. Aplicando la segunda ley de Newton al bloque se tiene



Douglas C Giancoli. Física para Ciencias e Ingenierías

Figura 23.

$$\sum F_x = Ma = M\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x - k_2x$$

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{(k_1 + k_2)}{M}x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2x$$

$$w^2 = \frac{(k_1 + k_2)}{M}$$

Ahora bien, dado que en este problema las constantes son iguales, se tiene entonces que la frecuencia natural de las oscilaciones libres es

$$w_0^2 = \frac{2k}{M}$$

$$\boldsymbol{w_0 = \sqrt{\frac{2k}{M}}}$$

Reemplazando los valores dados

$$w_0 = \sqrt{\frac{2 * 125}{0.215}}$$

$$\boldsymbol{w_0 = 34.1\ s^{-1}}$$

(b) el que la amplitud de las oscilaciones después de 55 oscilaciones se reduzca a la mitad significa que

$$A(t = 55T) = \frac{1}{2}A_0$$

Como ya se sabe la expresión para la amplitud de las oscilaciones amortiguadas es

$$\boldsymbol{A(t) = A_0 e^{-\gamma t}}$$

Reemplazando se tiene

$$\frac{1}{2}A_0 = A_0 e^{-\gamma * 55T}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-\gamma * 55T}$$

Tomando el logaritmo natural

$$-\ln 2 = -55T\gamma$$

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{\ln 2}{55T}}$$

Del ítem (a) se tiene que $w_0 = 34.1\ s^{-1}$, y como sabemos $w = {}^{2\pi}/_{T}$, por lo tanto

$$T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{34.1} = 0.18\ s$$

Reemplazando T en la expresión para $\boldsymbol{\gamma}$

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{\ln 2}{55 * 0.18} = 0.07\ s^{-1}}$$

(c) Ahora lo que necesitamos conocer el tiempo para que

$$A(t) = \frac{1}{4}A_0$$

Reemplazando en la expresión para la amplitud

$$\frac{1}{4}A_0 = A_0 e^{-\gamma t}$$

Simplificando y tomando el logaritmo

$$-\ln(4) = -\gamma t$$

$$t = \frac{\ln(4)}{\gamma}$$

Reemplazando el valor de γ encontrado en (b)

$$t = \frac{\ln(4)}{0.07}$$

$$t = 19.8\ s$$

7. Una masa de 3.0 kg está vibrando en un resorte. Tiene una rapidez angular resonante de 2.4 rad/s y una rapidez angular de amortiguamiento de 0.14 rad/s. Si la fuerza impulsora es de 2.0 N, encuentre la amplitud máxima si la rapidez angular impulsora es de a) 1.2 rad/s, b) 2.4 rad/s y c) 4.8 rad/s. (GIANCOLI, C., 2009)

Solución: La amplitud de las oscilaciones forzadas está dada por

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(w^2 - w_0^2\right)^2 + b^2w^2/_{m^2}}} = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(w^2 - w_0^2\right)^2 + 4\gamma^2 w^2}}$$

De donde w, es la frecuencia angular de las oscilaciones forzadas (fuerza externa); w_0 es la frecuencia de las oscilaciones libres y b es la constante de amortiguamiento.

De los datos suministrados por el problema se tiene

$m = 3.0\ kg$ $\quad$ $w_0 = 2.4\ rad/s$ $\quad$ $\gamma = 0.14\frac{rad}{s} = \frac{b}{2m}$ $\quad$ $F_0 = 2.0N$

Ahora reemplazando los datos dados para cada una de las frecuencias impulsoras w, se tiene

(a) $\boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3 * \sqrt{(1.2^2 - 2.4^2)^2 + 4 * 0.14^2 * 1.2^2}}} = \mathbf{0.153\ m}$

(b) $\boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3 * \sqrt{(2.4^2 - 2.4^2)^2 + 4 * 0.14^2 * 2.4^2}}} = \mathbf{0.229\ m}$

(c) $\boldsymbol{A} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3 * \sqrt{(4.8^2 - 2.4^2)^2 + 4 * 0.14^2 * 4.8^2}}} = \mathbf{0.010\ m}$

8. Una fuerza impulsora que varía senoidalmente se aplica a un oscilador armónico amortiguado con constante de fuerza k y masa m. Si la constante de amortiguamiento tiene el valor b_1, la amplitud es A_1 cuando la frecuencia angular impulsora es $\sqrt{k/_M}$. En términos de A_1, ¿cuánto vale la amplitud con la misma frecuencia impulsora y la misma amplitud de la fuerza impulsora $F_{máx}$ si la constante de amortiguamiento es a) $3b_1$ y b) $b_1/2$? (GIANCOLI, C., 2009)

Solución: La amplitud de las oscilaciones forzadas está dada por

$$A = \frac{F_{max}}{m\sqrt{(w^2 - w_0^2)^2 + {b^2w^2}/_{m^2}}}$$

De donde w, es la frecuencia angular de la fuerza impulsora y w_0 es la frecuencia de las oscilaciones libres y esta dada por

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Con las condiciones dadas se tiene

$$A_1 = \frac{F_{max}}{m\sqrt{(w_0^2 - w_0^2)^2 + {b_1^2 w_0^2}/{m^2}}}$$

Da lugar a

$$A_1 = \frac{F_{max}}{{b_1 w_0}/{m}}$$

$$\boldsymbol{A_1 = \frac{m * F_{max}}{b_1 w_0}}$$

(a) Si la constante de amortiguamiento es *3b1*

$$A_2 = \frac{m * F_{max}}{3b_1 w_0}$$

$$\boldsymbol{A_2 = \frac{A_1}{3}}$$

(b) Ahora la constante de amortiguamiento es *b1/2*

$$A_3 = \frac{m * F_{max}}{\frac{b_1}{2} w_0}$$

$$A_3 = \frac{2m * F_{max}}{b_1 w_0}$$

$$\boldsymbol{A_3 = 2A_1}$$

Como conclusión se tiene que si el amortiguamiento aumenta la amplitud de las oscilaciones disminuye y si el amortiguamiento disminuye entonces la amplitud aumenta, lo anterior es lo que sucede realmente.

9. Un objeto de 2.00 kg unido a un resorte se mueve sin fricción y es impulsado por una fuerza externa conocida por $F = (3.00N)sen(2\pi t)$. La constante de fuerza del resorte es de 20.0 N/m. Determine a) el periodo y b) la amplitud del movimiento (YOUNG & FREEDMAN, Física universitaria volumen 1. 13ª edición, 2013)

Solución: (a) El objeto oscila con la misma frecuencia de la fuerza impulsora externa, por lo tanto, el periodo será el de la fuerza, entonces

$$w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$$

$$\boldsymbol{T = 1\ s}$$

(c) La amplitud de las oscilaciones forzadas está dada por

$$\boldsymbol{A = \frac{F_{max}}{m\sqrt{\left(w^2 - w_0^2\right)^2 + {b^2 w^2}/{m^2}}}}$$

Dado que no hay amortiguamiento ($b = 0$).

$$\boldsymbol{A = \frac{F_{max}}{m\left(w^2 - w_0^2\right)}}$$

Con $\boldsymbol{F_{max}} = 3\ N$

$$w_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$w_0^2 = \frac{20.0}{2.00}$$

$$\boldsymbol{w_0^2 = 10\ s^{-2}}$$

Reemplazando en la expresión para amplitud se tiene

$$A = \frac{3}{2 * ((2\pi)^2 - 10)}$$

$$\boldsymbol{A = 0.0509\ m}$$

ONDAS MECANICAS

Los fenómenos ondulatorios son una de las ramas más estudiadas en la física, esto debido a la multiplicidad de aplicaciones que ellos tienen, de ahí que sea importante tanto para la vida profesional como para la cotidianidad entender estos fenómenos.

Una onda es una perturbación que viaja en el espacio. Las ondas que necesitan de un medio para poder viajar "*propagarse*", se denominan ondas mecánicas, ejemplos de estas son: El sonido, las ondas que viajan en cuerdas, las olas, etc. Aquellas ondas que no necesitan de un medio para propagarse, es decir que viajan en el vacío, son las llamadas ondas electromagnéticas, dentro de este rango se encuentra, los rayos gamma, los rayo x, la luz y cualquier tipo de radiación. (Tipler & Mosca, 2010)

Aquí nos ocuparemos de las ondas mecánicas (ondas en cuerdas y sonido), pero en especial estudiaremos las ondas periódicas armónicas, pues estas son la base fundamental para la comprensión del fenómeno ondulatorio. Lo anterior de acuerdo con la teoría de Fourier, que plantea que cualquier onda periódica se puede expresar como una suma de senos y cosenos.

La ecuación que rige cualquier fenómeno ondulatorio es

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) = 0$$

Ecuación, que se conoce como *ecuación unidimensional de onda*, y es una ecuación diferencial parcial de segundo orden. Se dice unidimensional porque la onda viaja en una sola dirección, en este caso *x*.

Si se tuviese una onda bidimensional la ecuación seria

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,y,t) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi(x,y,t) = 0$$

Y si fuese una onda tridimensional

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,y,z,t) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(x,y,z,t) = 0$$

Ecuación que se puede escribir como

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(x,y,z,t) - \nabla^2\Psi(x,y,z,t) = 0$$

El termino v, es la velocidad de propagación de la onda, y esta depende de las propiedades mecánicas del medio donde la onda viaje. Para las ondas que viajan en cuerdas se tiene

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{\mu}}}$$

De donde T, es la tensión a la que está sometida la cuerda y μ, la densidad lineal de esta (masa por unidad de longitud).

Para las ondas sonoras que se propagan en una varilla

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{\rho}}}$$

De donde *Y*, es el módulo de Young, y ρ la densidad del material.

La velocidad de propagación de las ondas en un gas está dada por

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\rho}}}$$

Donde β, es el módulo de compresión volumétrica del gas, y ρ la densidad de este.

La función ψ (letra griega Psi), es la función de onda, y es la solución a la ecuación diferencial. En el caso de que se propaguen ondas periódicas unidireccionales la función de onda estará dada por

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{A_0} \begin{cases} \boldsymbol{Sen(kx - wt + \phi)} \\ \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{Cos(kx - wt + \phi)} \end{cases}$$

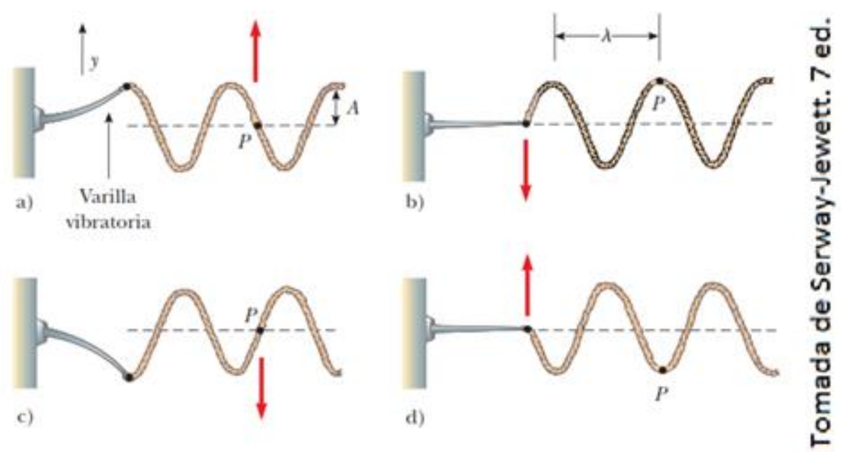


Figura 24. Forma de producir una onda senoidal (cosenoidal). Una cuerda se ata a una varilla que vibra con movimiento armónico simple

La figura 24. Ilustra las ondas y una de las formas de producir las correspondientes ondas descritas por las funciones de onda mencionadas anteriormente.

En la anterior ecuación se distinguen dos constantes, por un lado, se tiene el número de onda k, que está dada por

$$\boldsymbol{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

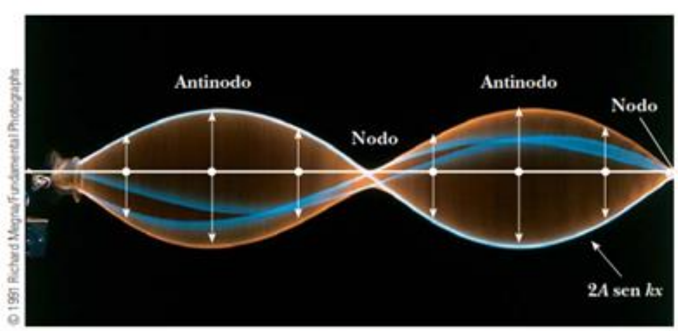
Aquí λ (lamda), es la longitud de onda. La longitud de onda es una especie de periodo espacial, pues la onda se repite cada que avanza una longitud de onda.

La otra constante en la ecuación de onda es la frecuencia angular, w, la cual al igual que en las oscilaciones está dada por

$$\boldsymbol{w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

Como información adicional se puede decir que las ondas no transportan materia, solo transportan energía y momentum.

Cuando sobre una cuerda viajan ondas armónicas de igual frecuencia, pero en direcciones opuestas, se obtiene la cuerda lo que se llama patrón de onda estacionaria, esto se explica por el principio de superposición (suma). La figura 25, ilustra este patrón.



Tomada de Serway-Jewett. 7 ed.

Figura 25. Patrón de onda estacionaria en una cuerda

En la onda estacionaria se tiene puntos de la cuerda cuya amplitud de oscilación es cero "*los nodos*" y otros puntos donde la amplitud de oscilación es máxima "*antinodos*" (Serway & Jewett, Jr., 2018)

La ecuación de la onda resultante, onda estacionaria es

$$y(x,t) = (2Asenkx)\cos(wt)$$

El termino $2Asenkx$, es la amplitud de la onda estacionaria, y en ella se puede observar que existen ciertos puntos para los cuales como ya se mencionó la amplitud de oscilación es cero, los nodos estos ocurren cuando

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \ldots . = \frac{n\lambda}{2}$$

Con $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Y los antinodos ocurren en

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4} \ldots . = \frac{n\lambda}{4}$$

Ahora con $n = 1, 3, 5, \ldots$

La figura 26. Ilustra los patrones de onda estacionaria que se forman en una cuerda cuando está tiene fijos en ambos extremos. Aquí se representan los tres primeros patrones de que se forma en ella

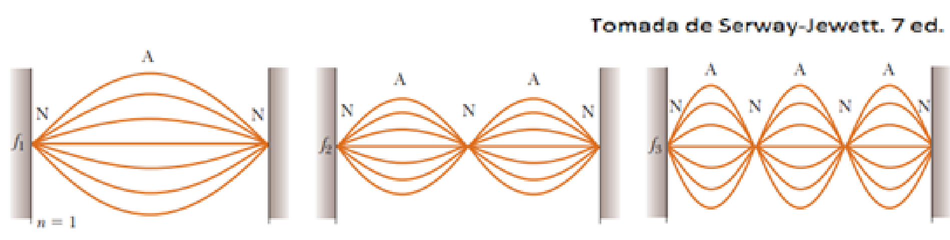


figura 26. Modos de vibracion de una cuerda sujeta en ambos extremos

En la parte (a) se muestra el modo fundamental, donde

$$\lambda_1 = 2l$$

El subíndice 1 hace referencia a el uso que se está formando. A esta forma de vibración de la cuerda también se le conoce como primer armónico.

En (b) se tiene

$$\lambda_2 = l$$

A este modo de vibración se le conoce como segundo modo, segundo armónico o primer sobre tono.

Ahora bien, si la cuerda está vibrando como en (c) entonces se dice que es el segundo sobre tono, tercer armónico o modo. Y, por lo tanto

$$\lambda_3 = \frac{2}{3}l$$

Para el n - ésimo armónico, o (n -1) sobre tono

$$\lambda_n = \frac{2}{n}l$$

Las correspondientes frecuencias de vibración para estos modos son

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2l}$$

$$f_2 = \frac{v}{l}$$

$$f_3 = 3\,\frac{v}{2l}$$

$$\boldsymbol{f_n = n\,\frac{v}{2l}}$$

De donde $n = 1, 2, 3 \ldots$ en términos generales se tiene $\boldsymbol{f_n = nf_1}$

La figura 27. Ilustra las ondas estacionarias que se forman en una columna de aire, un tubo

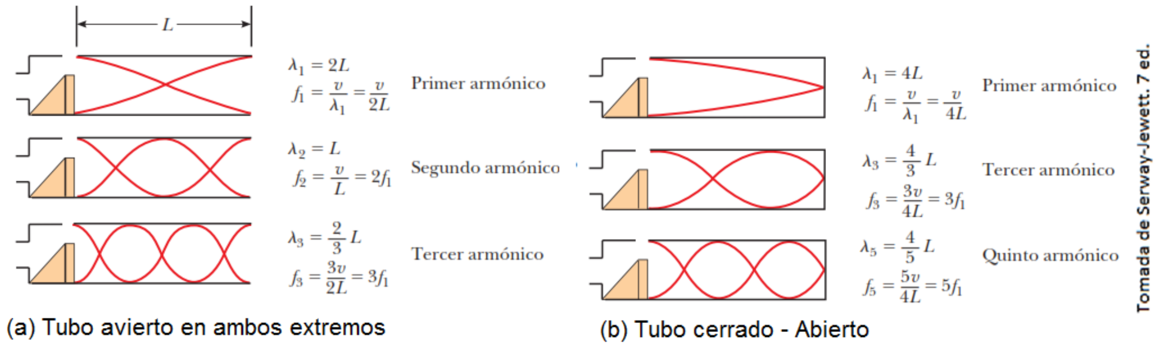


Figura 27. Ondas estacionarias en una columna de aire (tubo)

Cuando hay movimiento relativo entre una fuente sonora y un observador que percibe el sonido, se presenta el famoso *efecto Doppler*. Este efecto consiste en un cambio en la frecuencia que percibe el observador respecto de la frecuencia del sonido que emite la fuente. La frecuencia percibida por el observador está dada por

$$\boldsymbol{f' = \left(\frac{v + v_0}{v - v_s}\right) f}$$

De donde v, es la velocidad del sonido, v_0, la velocidad del observador y v_S, la velocidad de la fuente.

PROBLEMAS RESUELTOS DE ONDAS MECANICAS

1. Los seguidores en un estadio de fútbol local están tan emocionados por la victoria de su equipo que inician “la ola” para celebrar. ¿Cuál o cuáles de las siguientes cuatro declaraciones es cierta? (Bauer & Westfall, 2011)

I. Esta ola es una onda viajera.

II. Esta ola es una onda transversal.

III. Esta ola es una onda longitudinal.

IV. Esta ola es una combinación de una onda longitudinal y una onda transversal.

a) I y II

b) sólo II

c) sólo III

d) I y IV

e) I y III

Solución: Una onda se define como una perturbación que viaja en un medio, si esta perturbación viaja en la misma dirección en que se produce la perturbación entonces se tiene una onda longitudinal, pero si la onda viaja en dirección perpendicular a la dirección de la perturbación entonces se tiene una onda transversal. De acuerdo lo anterior entonces se tiene que las opciones que describen la situación en el estadio son la I y II, por lo tanto, ***la respuesta correcta es la opción a***.

2. Usted desea reducir la rapidez de una onda que viaja en una cuerda a la mitad de su valor actual mediante el cambio de la tensión en la cuerda. ¿Por qué factor debe reducir la tensión de la cuerda? (Bauer & Westfall, 2011)

a) 1

b) $\sqrt{2}$

c) 2

d) 4

e) Ninguna de las anteriores

Solución: La velocidad de una onda en una cuerda está dada por

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

De donde T es la tensión en la cuerda y μ la densidad lineal. Como se puede ver la velocidad depende de la raíz cuadrada de la tensión, por lo tanto, si se desea reducir la velocidad a la mitad se debe disminuir la tensión a un cuarto (T/4), entonces ***la opción correcta es la d***.

3. Suponga que la tensión se duplica en una cuerda en la que se propaga una onda estacionaria. ¿Cómo cambiará la velocidad de la onda estacionaria?

(Bauer & Westfall, 2011)

a) Se duplicará.

b) Se cuadruplicará.

c) Será multiplicada por $\sqrt{2}$

d) Será multiplicada por 1/2.

Solución: dado que

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Si se duplica la tensión entonces

$$v = \sqrt{\frac{2T}{\mu}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Como se puede ver la velocidad se ve afectado en un factor de $\sqrt{2}$, por lo tanto, ***la respuesta correcta es la opción c***.

4. ¿Cuál de las siguientes ondas transversales tiene la mayor potencia? (Bauer & Westfall, 2011)

    a) Una onda con la velocidad v, amplitud A y frecuencia f

    b) Una onda con la velocidad v, amplitud $2A$ y frecuencia $f/2$

    c) Una onda con la velocidad $2v$, amplitud $A/2$ y frecuencia f

    d) Una onda con la velocidad $2v$, amplitud A y frecuencia $f/2$

e) Una onda con la velocidad v, amplitud $A/2$ y frecuencia $2f$

Solución: La potencia transmitida por una onda sobre una cuerda esta dada por

$$P = \frac{1}{2}\,\mu v w^2 A^2$$

Teniendo en cuenta que $w = 2\pi f$

Examinaremos ahora cada una de las opciones

$$P_a = \frac{1}{2}\,\mu v w^2 A^2$$

$$P_b = \frac{1}{2}\,\mu v \left({}^{w}/_{2}\right)^2 (2A)^2 = \frac{1}{2}\,\mu v w^2 A^2 = P_a$$

$$P_c = \frac{1}{2}\,\mu (2v) w^2 \left({}^{A}/_{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,\mu v w^2 A^2\right) = \frac{1}{2}\,P_a$$

$$P_d = \frac{1}{2}\,\mu (2v) \left({}^{w}/_{2}\right)^2 A^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,\mu v w^2 A^2\right) = \frac{1}{2}\,P_a$$

$$P_e = \frac{1}{2}\,\mu v (2w)^2 \left({}^{A}/_{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\mu v w^2 A^2 = P_a$$

De acuerdo con lo hecho se puede ver existen tres opciones para las cuales la potencia es la misma $P_a = P_b = P_e$

5. La rapidez de ondas luminosas en el aire es mayor que la rapidez del sonido en el aire por *aproximadamente* un factor de un millón. Dada una onda sonora y una onda luminosa de la misma longitud de onda, ambas atravesando el aire, ¿cuál de las declaraciones sobre sus frecuencias es cierta? (Bauer & Westfall, 2011)

a) La frecuencia de la onda sonora será aproximadamente un millón de veces más grande que la de la onda luminosa.
b) La frecuencia de la onda sonora será aproximadamente mil veces más grande que la de la onda luminosa.
c) La frecuencia de la onda luminosa será aproximadamente mil veces más grande que la de la onda sonora.
d) La frecuencia de la onda luminosa será aproximadamente un millón de veces más grande que la de la onda sonora.
e) Hay poca información para determinar la relación entre las dos frecuencias.

Solución: La velocidad de una onda en términos de la longitud de onda y la frecuencia está dada por

$$v = \lambda f$$

Despejando la longitud de onda

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

Dado que $c \approx 10^6 v$, donde c es la velocidad de la luz, para nuestro caso las ondas sonoras y las luminosas tiene la misma longitud de onda, entonces

$$\lambda_{sonoras} = \lambda_{luminosas}$$

$$\frac{v}{f_{sonoras}} = \frac{c}{f_{luminosas}}$$

$$\frac{v}{f_{sonoras}} = \frac{10^6 v}{f_{luminosas}}$$

$$f_{luminosa} = 10^6 f_{sonoras}$$

De acuerdo con esta última relación se tiene que la frecuencia de las ondas luminosas son aproximadamente un millón de veces mayor que la frecuencia de las ondas sonoras, por lo tanto, ***la respuesta correcta es la opción d***.

6. Una cuerda se pone a oscilar, y se crea una onda estacionaria con tres antinodos. Si la tensión de la cuerda es incrementada por un factor de 4, (Bauer & Westfall, 2011)

a) el número de antinodos aumenta.

b) el número de antinodos permanece igual.

c) el número de antinodos disminuye.

d) el número de antinodos será igual al número de nodos.

Solución: la velocidad de una onda en una cuerda está dada por:

$$v = \lambda f = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

La longitud de onda en términos del número de antinodos es

$$\lambda = \frac{2l}{n}$$

Al reemplazar en la expresión para la velocidad se tiene

$$\frac{2l}{n} f = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$2lf\sqrt{\mu} = n\sqrt{T}$$

En esta última expresión si se supone que la frecuencia de la cuerda no cambia, entonces el lado izquierdo de la ecuación es constante, por lo tanto, el lado derecho debe permanecer, lo que significa que, si cambia la tensión, también debe de cambiar el número de antinodos. Entonces si la tensión aumenta el número de antinodos debe disminuir, lo cual significa que ***la respuesta correcta es la opción c***.

7. Los diferentes colores de luz que percibimos son un resultado de las frecuencias (y longitudes de onda) diferentes de la radiación electromagnética. La radiación infrarroja tiene frecuencias más bajas que la luz visible, y la radiación ultravioleta tiene frecuencias más altas que la luz visible. Los colores primarios son rojo (R), amarillo (Y) y azul (B). Ordene estos colores por su longitud de onda, de la más corta a la más larga. (Bauer & Westfall, 2011)
   a) B, Y, R
   b) B, R, Y
   c) R, Y, B
   d) R, B, Y

Solución: La longitud de onda para una onda luminosa (electromagnética) es

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Se tiene que la radiación electromagnética es más energética entre mayor sea la frecuencia y por ende de menor longitud de onda, desde este punto de vista la más energética es la radiación correspondiente al azul (menor longitud de onda) y la menos energética es la correspondiente al rojo, por lo tanto, ***la respuesta correcta es la opción a***.

8. Si las ondas transversales en una cuerda viajan con una velocidad de 50 m/s cuando la cuerda está bajo una tensión de 20 N, ¿qué tensión de la cuerda se requiere para que las ondas viajen con una velocidad de 30 m/s? (Bauer & Westfall, 2011)

   a) 7.2 N
   b) 12 N
   c) 33 N
   d) 40 N
   e) 45 N
   f) 56 N

Solución: La velocidad de las ondas en una cuerda está dada por

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$\sqrt{\mu} = \frac{\sqrt{T}}{v}$$

Dado que la densidad lineal de la cuerda no cambia en las dos situaciones, entonces

$$\sqrt{\mu_1} = \sqrt{\mu_2}$$

$$\frac{\sqrt{T_1}}{v_1} = \frac{\sqrt{T_2}}{v_2}$$

Reemplazando los valores se tiene

$$\frac{\sqrt{20}}{50} = \frac{\sqrt{T_2}}{30}$$

$$T_2 = \left(\frac{3\sqrt{20}}{5}\right)^2$$

$$T_2 = 7.2\ N$$

La respuesta correcta es la opción a.

9. Un cable de acero consiste en dos secciones con diferentes áreas de sección transversal, A_1 y A_2. Una onda sinusoidal viajera se manda a lo largo de este cable desde su extremo delgado. ¿Qué pasa con la onda cuando se topa con la frontera A_1/A_2? ¿Cómo cambian la rapidez, frecuencia y longitud de onda de la onda? (Bauer & Westfall, 2011)

Respuesta: La figura 27a, ilustra la situación experimental, se tiene una onda (pulso) incidente que viaja de la parte más delgada de la cuerda hacia la más pasada, cuando esta onda incidente llega a la frontera parte de la onda pasa, le llamaremos onda transmitida o pulso trasmitido, la otra parte se regresa, esta es la onda o pulso reflejados. Las ondas reflejadas y transmitidas se ilustran en la figura 27b. En términos de energía diremos que la inicialmente por la primera sección se propaga una cierta cantidad de energía, cuando esta energía llega a la frontera una parte logra pasar a la segunda sección y otra se regresa por donde vino. Colocando esto en una ecuación seria

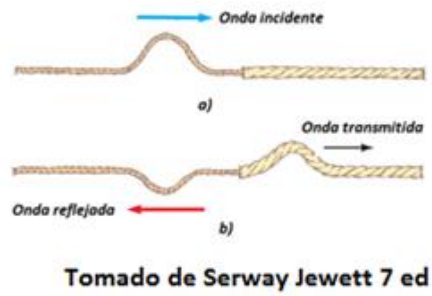


Figura 27.

$$E_{incidente} = E_{transmitida} + E_{reflejada}$$

Las dos secciones forman una sola cuerda, por lo tanto, la tensión en ambas partes es la misma, además toda la cuerda compuesta vibra a la misma frecuencia. Dado que las densidades lineales de cada sección son diferentes se tiene que las velocidades de propagación en cada sección serán diferentes, esto es

$$v = \lambda f = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

De acuerdo con la ecuación se tiene que la velocidad es inversamente proporcional a la densidad lineal de masa, es decir, la velocidad de la onda será mayor en aquella porción de la cuerda más ligera y la onda viajará más lento en la sección más pesada.

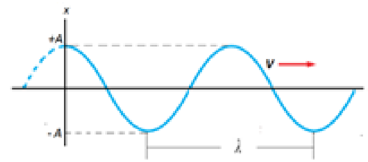
También de la ecuación se puede concluir que la longitud de onda será mayor donde la velocidad sea mayor, pues la frecuencia es la misma para ambas secciones, es decir la onda viajera tiene mayor longitud de onda en la sección menos densa, lo contrario ocurre en la sección más pesada.

10. Una onda transversal sinusoidal de una longitud de onda de 20.0 cm y una frecuencia de 500. Hz viaja a lo largo de una cuerda en la dirección z positiva. Las oscilaciones de onda toman lugar en el plano xz y tienen una amplitud de 3.00 cm. En el instante $t = 0$, el desplazamiento de la cuerda en $x = 0$ es $z = 3.00$ cm. (Bauer & Westfall, 2011)

a) Se toma una fotografía de la onda en $t = 0$. Haga un trazo sencillo de la cuerda en este instante (incluidos los ejes).
b) Determine la velocidad de la onda.
c) Determine el número de onda de esta onda.
d) Si la densidad lineal de masa de la cuerda es de 30.0 g/m, ¿cuál es la tensión de la cuerda?
e) Determine la función $D(z, t)$ que describe el desplazamiento x, producido en la cuerda por esta onda.

Solución:

a) De acuerdo con lo planteado en problema la onda tiene su máximo desplazamiento en z = 0 y t = 0, por lo tanto, el grafico que describe esta onda es el que se aprecia al frente.



Tomado de Serway Jewett 7 ed

Figura 28.

b) La información suministrada es λ **=** 20 cm = 0.2m, f = 500 Hz, A = 3 cm = 0.03m, μ = 30 g/m = 0.03 kg/m. La velocidad de la onda está dada por

$$v = \lambda f$$

$$v = 0.2\, m * 500 Hz$$

$$\boldsymbol{v = 100\ {}^{m}/_{s}}$$

c) El número de onda está dado por la ecuación

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\boldsymbol{\kappa = \frac{2\pi}{0.2} = 10\pi\, m^{-1}}$$

d) La velocidad es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$T = v^2\mu$$

$$T = (100\ {}^{m}/_{s})^2 * 0.03\ {}^{kg}/_{m}$$

$$\boldsymbol{T = 300\, N}$$

e) La ecuación que representa a esta onda en cualquier instante la podemos representar por

$$D(z,t) = ACos(\kappa z - wt)$$

$$w = 2\pi f$$

$$w = 2 * \pi * 500Hz$$

$$w = 1000\pi\ Hz$$

Reemplazando todo en la expresión se tiene

$$\boldsymbol{D(z,t) = 0.03 * Cos(10\pi z - 1000\pi t)}$$

Donde las distancias están en metros y los tiempos en segundos.

11. Una onda que se propaga en una cuerda tiene la ecuación de movimiento

$$y(x,t) = 0.02Sen(5.00x - 8.00t)$$

a) Calcule la longitud de onda y la frecuencia de la onda.

b) Calcule su velocidad.

c) Si la densidad lineal de masa de la cuerda es μ = 0.10 kg/m, ¿cuál es la tensión de la cuerda? (GIANCOLI, C., 2009)

Solución: Si se compara la ecuación dada con la ecuación general de una onda

$$y(x,t) = ASen(\kappa x \pm wt + \varphi)$$

Se tiene que: *A= 0.02 m, k = 2.00 m*$^{-1}$*, w = 8.00 Hz* y $\varphi = 0$

$$\kappa = 2.00 = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{2.00} = \pi\ m$$

$$w = 2\pi f$$

$$8.00 = 2\pi f$$

$$f = \frac{2\pi}{8.00}$$

$$\boldsymbol{f = 0.78\ Hz}$$

$$v = \lambda f$$

$$v = \pi\, m * 0.78\, Hz$$

$$\boldsymbol{v = 2.47\ {}^{m}/_{s}}$$

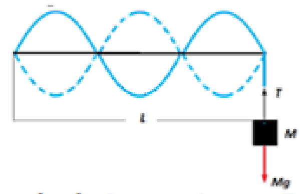
$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$T = (2.47\ {}^{m}/_{s})^2 * 0.1\ {}^{kg}/_{m}$$

$$\boldsymbol{T = 0.61\ N}$$

12. Dos ondas que viajan en direcciones opuestas a lo largo de una cuerda fijada en ambos extremos crean una onda estacionaria descrita por *y(x, t) = 1.00*10*^{2}*Sen (25x)*Cos (1 200t).* La cuerda tiene una densidad lineal de masa de 0.01 kg/m, y la tensión de la cuerda es aplicada por una masa que cuelga de un extremo. Si la cuerda vibra en su tercer armónico, calcule a) la longitud de la cuerda, b) la velocidad de las ondas y c) la masa de la masa colgante. (Serway & Jewett, Jr., 2018)

Solución: El esquema de la situación experimental seria De la ecuación dada se extrae la siguiente información



Tomado de Serway Jewett 7 ed

Figura 29.

$$2A = 1.00 * 10^{-2}m \quad \kappa = 25\, m^{-1} \quad w = 1200\, Hz$$

Dado que la cuerda está vibrando en su tercer armónico, entonces se tiene

$$L = 3\frac{\lambda}{2}$$

De la expresión para el número de onda

$$\kappa = 25m^{-1} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{25}\, m$$

Reemplazando en la expresión para L

$$L = 3\frac{\frac{2\pi}{25}}{2}\, m$$

$$\boldsymbol{L = 0.38\, m}$$

La velocidad de la onda se puede obtener mediante la ecuación

$$v = \frac{w}{\kappa}$$

$$v = \frac{1200\, Hz}{25\, m^{-1}}$$

$$\boldsymbol{v = 48\, {}^{m}/_{s}}$$

Si se aplica la segunda ley de Newton a la masa colgante se tiene

$$\sum F_y = 0$$

$$T - Mg = 0$$

$$T = Mg$$

$$M = \frac{T}{g}$$

Entonces para poder conocer la masa del cuerpo colgante debemos hallar la tensión. La tensión está relacionada con la velocidad mediante la ecuación

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$T = \mu^2 v$$

$$T = (48\ {}^{m}/_{s})^2 * 0.01\ {}^{kg}/_{m}$$

$$T = 23.04\ N$$

Reemplazando en la expresión para M

$$M = \frac{23.04\ N}{9.8\ {}^{m}/_{s^2}}$$

$$\boldsymbol{M = 2.35\ kg}$$

13. Como se muestra en la figura 30, una onda sinusoidal viaja hacia la derecha con una rapidez de v_1 a lo largo de la cuerda, que tiene una densidad lineal de masa μ_1. Esta onda tiene la frecuencia f_1 y longitud de onda λ_1. Puesto que la cuerda 1 está sujetada a la cuerda 2 (que tiene una densidad lineal de masa $\mu_2 = 3\mu_1$), la primera onda producirá una nueva onda en la cuerda 2, la cual también viajará hacia la derecha. ¿Cuál es la frecuencia f_2 de la onda producida en la cuerda 2? ¿Cuál es la rapidez v_2 de la onda producida en la cuerda 2? ¿Cuál es la longitud de onda λ_2 de la onda que se produce en la cuerda 2? Escriba todas las respuestas en términos de f_1, v_1 y μ_1. (Bauer & Westfall, 2011)

tomado de Bauer. W. - Westfall. G. D. 2 ed.

Figura 30.

Solución: Primero que todo tenemos que la cuerda compuesta vibra como una solo, lo que significa que ambas secciones tendrán la misma frecuencia, $f_1 = f_2$, de igual manera la tensión.

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{T}{3\mu_1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{T}{\mu_1}}$$

Entonces se tiene que

$$\boldsymbol{v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\, v_1}$$

Ahora bien

$$v_2 = \lambda_2 f_2$$

$$f_1 = f_2$$

Reemplazando v_2

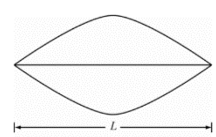
$$\frac{1}{\sqrt{3}} v_1 = \lambda_2 f_1$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{v_1}{f_1} = \lambda_2}$$

14. Considere una cuerda de guitarra estirada 80.0 cm entre sus extremos sujetados. La cuerda está afinada para tocar Do central con una frecuencia de 256 Hz cuando oscila en su modo fundamental, es decir, con un antinodo entre los extremos. Si la cuerda se desplaza 2.00 mm (de manera transversal) en su punto medio y se suelta para producir esta nota, ¿cuáles son la rapidez de onda v y la rapidez máxima $V_{máx}$ del punto medio de la cuerda? (Bauer & Westfall, 2011)

Solución: Como la cuerda vibra en su modo fundamental se tiene que

$$L = \frac{\lambda}{2}$$



$$\lambda = 2L$$

$$\lambda = 2 * 80.0\ cm = 2 * 0.80\ m$$

$$\boldsymbol{\lambda = 1.60 m}$$

Dado que $v = \lambda f$,

$$v = 1.60\, m * 256\, s^{-1}$$

$$\boldsymbol{v = 409.6\, ms^{-1}}$$

Puesto que cada trozo de la cuerda vibra con movimiento armónico simple, entonces el punto medio vibrará con M.A.S y la velocidad transversal máxima, será

$$V_{max} = Aw = A * 2\pi f$$

$$V_{max} = 2.00mm * 2\pi * \ 256s^{-1}$$

$$V_{max} = 2.00 * 10^{-3}m * 2\pi * 256s^{-1}$$

$$\boldsymbol{V_{max} = 3.22\, m/s}$$

Referencias

Walker, J., Halliday, D., & Resnick, R. (2014). *Fundamentals of physics.* Rosewood Drive: Wiley.

Bauer, W., & Westfall, G. D. (2011). *FÍSICA PARA INGENIERÍA Y CIENCIAS. Volumen 1.* México: McGRAW-HILL.

Fernández , J. L., & Coronado, G. (Abril de 2013). *FISICALAB*. Obtenido de https://www.fisicalab.com/apartado/frente-de-onda

GIANCOLI, C., D. (2009). *FÍSICA 1. Principios con aplicaciones. Sexta edición.* México: PEARSON EDUCACIÓN.

GIANCOLI, D. C. (2009). *FÍSICA 2. Principios con aplicaciones. Sexta edición.* México: PEARSON.

Pérez León, E. (16 de NOVIEMBRE de 2016). *PAIDEIAEDUCATION*. Obtenido de http://paideiaeducation.blogspot.com/2016/11/quien-tiene-la-razon-murcielago-o.html

Serway, R. A., & Jewett, Jr., J. W. (2018). *Física para ciencias e ingeniería.* Mexico: CENGAGE.

Serway, R. A., & Jewett, jr, J. W. (2019). *Fisica para ciencias e ingenirias* (Vol. 1). Ciudad de México: CENGAGE.

Serway, R. A., & Jewett, Jr., J. W. (2019). *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics.* Boston: Cengage Learning Editores, S. A.

Tipler, P. A., & Mosca, G. (2010). *Física para la ciencia y la tecnología. Electricidad y magnetismo/Lu.* Barelona: REVERTÉ.

YOUNG, H. D., & FREEDMAN, R. A. (2013). *Física universitaria volumen 1. 13ª edición* (Vol. 1). México: PEARSON.